Chapitre 2

Calculs de puissance

On explore ici les concepts de puissance qui seront la base pour la résolution de plusieurs types de problèmes. En fait, on verra qu'il est souvent plus simple de résoudre des problèmes en se servant des notions de puissance plutôt que les tensions et courants.

On introduira aussi le concept de facteur de puissance.

2.1 Introduction

Convention du phaseur

Soit $v(t) = v_m \cos(\omega t + \phi)$

De façon générale, lorsqu'on écrit $v(t)$ en notation phaseur,

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} \tag{2.1}$$

En électrotechnique, la convention est un peu différente. On utilise la valeur rms plutôt que la valeur maximale :

$$\mathbf{V} = V e^{j\phi} \Rightarrow \text{ où } V = V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{2.2}$$

Diagramme vectoriel d'un circuit

On peut représenter un phaseur par un diagramme vectoriel, comme à la figure 2.1 :

Ex : $f(t) = A\cos(\omega t + 135°)$

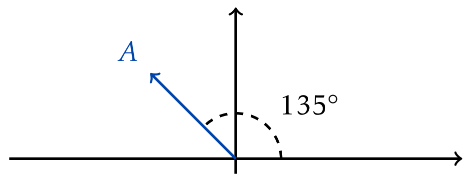


Figure 2.1 – Exemple de représentation vectorielle

On peut aussi combiner les phaseurs d'un circuit sur un même diagramme. Ex : soit un circuit RLC, où les tensions et courants mesurés sont :

$V_s = 240\angle 0°$ V	
$V_L = 452\angle(46°)$ V	$I_L = 11.3\angle(-43°)$ A
$V_C = 329\angle(-104°)$ V	$I_C = 9.4\angle(-10°)$ A
$V_R = 329\angle(-104°)$ V	$I_R = 6.2\angle(-104°)$ A

La figure 2.2 montre le diagramme vectoriel de ce circuit.

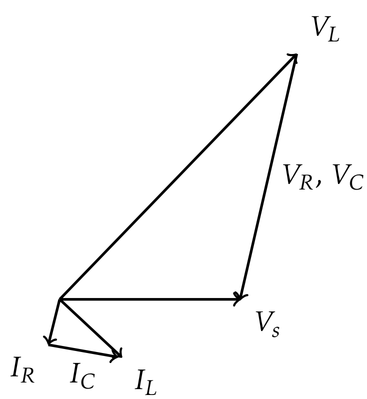


Figure 2.2 – Diagramme vectoriel

2.1.1 Calcul de la puissance en régime sinusoïdal permanent

Soit une impédance quelconque ayant une tension $v(t) = V_m\cos(\omega t)$ et un courant $i(t) = I_m\cos(\omega t - \phi)$. On définit la puissance instantanée par :

$$
\begin{aligned}
p(t) = v(t)i(t) &= V_m I_m \cos(\omega t)\cos(\omega t - \phi) && (2.3)\\
&= \frac{1}{2}V_m I_m\cos\phi + \frac{1}{2}V_m I_m\cos(2\omega t - \phi) && (2.4)\\
&= VI\cos\phi + VI\cos(2\omega t - \phi) && (2.5)
\end{aligned}
$$

L'énergie échangée entre la source et le dipôle :

$$w = \int_0^t p(t)dt \tag{2.6}$$

La puissance active ou puissance moyenne est :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}w(T) &(2.7)\\ &= VI\cos\phi &(2.8)\end{aligned}$$

Puissance complexe

On définit la puissance complexe S par :

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{VI}^* &(2.9)\\ &= V\angle 0 \cdot I\angle\phi \\ &= VI\angle\phi \\ &= VI\cos\phi + jVI\sin\phi &(2.10)\end{aligned}$$

$$S = P + jQ \tag{2.11}$$

La quantité Q est appelée **puissance réactive**, et son unité est le VAR (Volt-Ampère-Réactif).

La quantité S est aussi appelée **puissance apparente**, son amplitude est $|S| = VI$, et son unité est le VA (Volt-Ampère).

Facteur de puissance

Le facteur de puissance est le rapport de la puissance réelle sur la puissance complexe.

$$f_p = \frac{P}{|S|} = \cos\phi = \cos(\phi_v - \phi_i) \tag{2.12}$$

On peut aussi représenter les différents types de puissances (complexe, active et réactive) sous forme de triangle (figure 2.3).

Le facteur de puissance indique si la charge se comporte de façon inductive, capacitive ou résistive. Si le comportement est inductif, on dit que le facteur de puissance est en

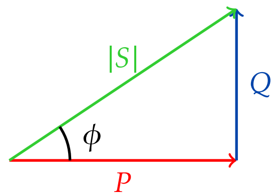
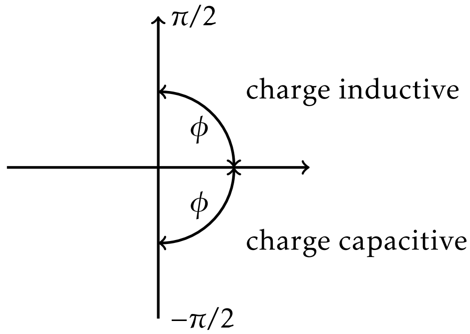


FIGURE 2.3 – Diagramme de puissance



$f_p = \cos(\phi)$

FIGURE 2.4

retard (ou arrière, ou positif). Si le comportement est capacitif, on dit que le facteur de puissance est en avance (ou négatif), comme à la figure 2.4.

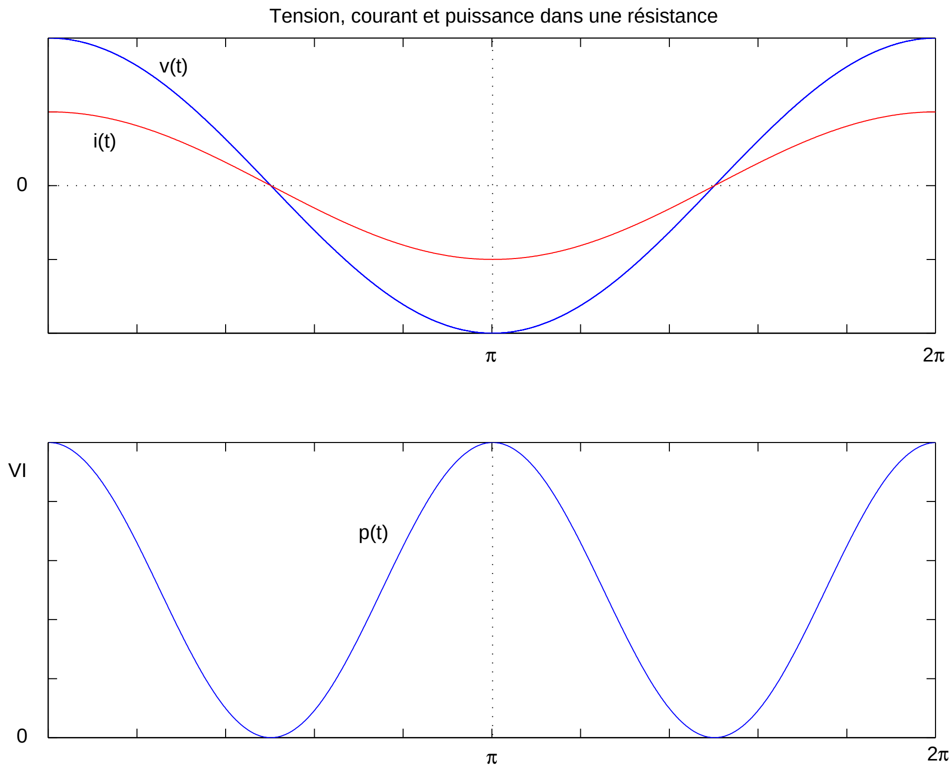
Donc,

$$
\begin{aligned}
\phi > 0 \quad & \Rightarrow \text{charge inductive (en arrière)} \\
& \rightarrow \text{I en arrière de V} \\
\phi < 0 \quad & \Rightarrow \text{charge capacitive (en avance)} \\
& \rightarrow \text{I en avance de V}
\end{aligned}
$$

2.1.2 Puissance dans une résistance

Dans une résistance, le courant et la tension sont en phase ($\phi = 0$). La puissance est donc :

$$p(t) = VI + VI\cos(2\omega t) \tag{2.13}$$



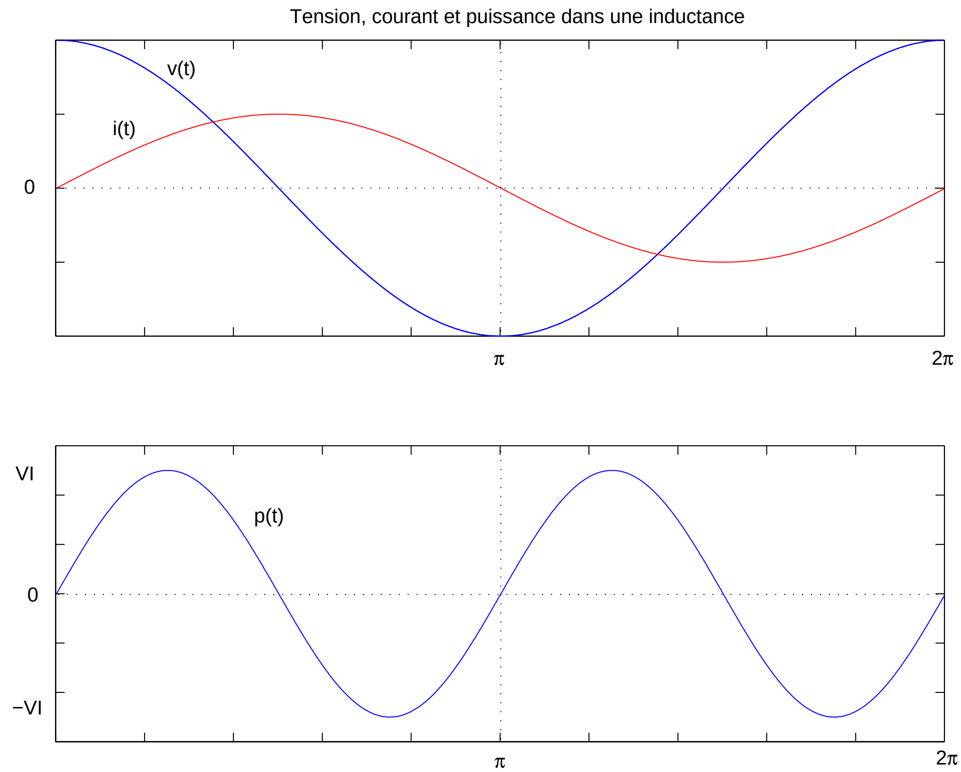
La puissance complexe est $S = \mathbf{VI}^*$. Dans le cas d'une résistance, puisque l'angle de courant est nul, $\mathbf{I}^* = \mathbf{I}$, alors $S = \mathbf{VI}$. Le facteur de puissance d'une résistance est $f_p = \cos\phi = 1$.

$P = VI > 0 \quad \rightarrow$ consomme de la puissance active
$Q = 0 \quad \rightarrow$ pas de puissance réactive

2.1.3 Puissance dans une inductance

Dans une inductance, la tension V est en avance par rapport au courant I d'un angle de $\phi = \pi/2$. La puissance est donc :

$$\begin{aligned} p(t) &= VI\cos(\pi/2) + VI\cos(2\omega t - \pi/2) \\ &= VI\sin(2\omega t) \end{aligned} \tag{2.14}$$



La puissance moyenne P est obtenue en intégrant $p(t)$:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = 0 \tag{2.15}$$

L'impédance est $X_L = j\omega L$, ce qui donne un courant de $\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{L\omega}e^{-j\pi/2}$.

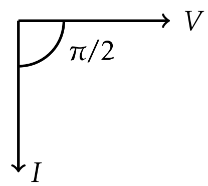


FIGURE 2.5 – Diagramme vectoriel de la tension et du courant dans une inductance

La puissance complexe est $S = \mathbf{VI}^*$. Dans une inductance, $S = jVI$. Alors, pour résumer :

$P = 0$ $\rightarrow$ pas de puissance active
$Q = VI > 0$ $\rightarrow$ consomme de la puissance réactive

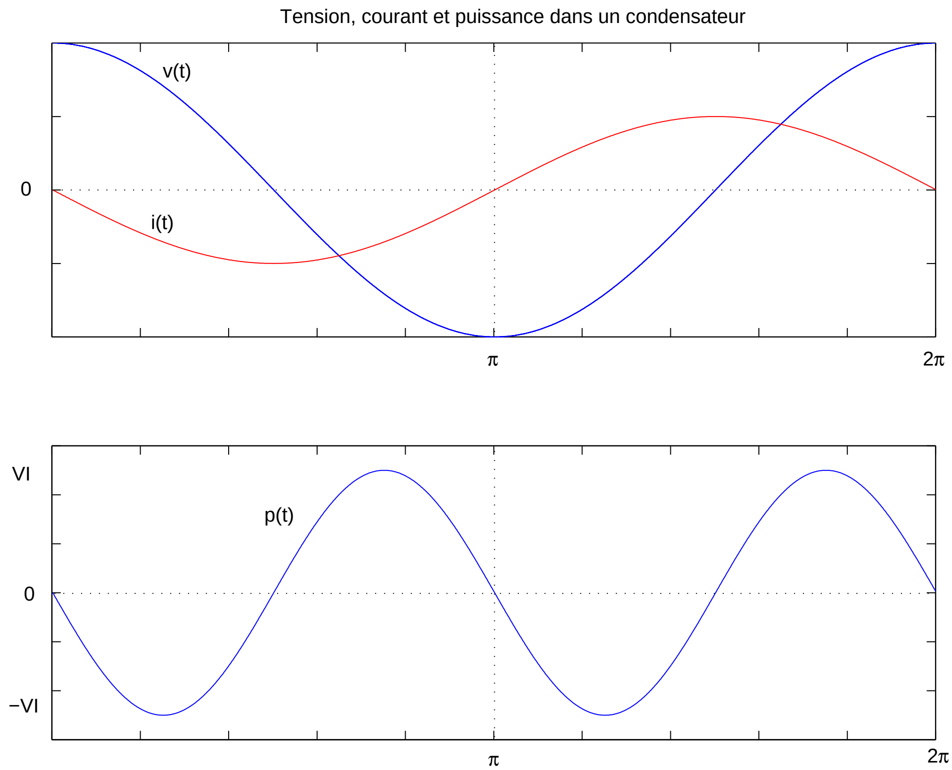
On peut aussi écrire que :

$$Q = \frac{V^2}{X_L} = \frac{V^2}{L\omega} = I^2 L\omega \tag{2.16}$$

2.1.4 Puissance dans un condensateur

Dans un condensateur, la tension V est en arrière par rapport au courant I d'un angle de $\phi = \pi/2$. La puissance est donc :

$$\begin{aligned} p(t) &= VI\cos(-\pi/2) + VI\cos(2\omega t + \pi/2) \\ &= -VI\sin(2\omega t) \end{aligned} \tag{2.17}$$



La puissance moyenne P est obtenue en intégrant $p(t)$:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = 0$$

L'impédance est $X_C = -j\frac{1}{\omega C}$, ce qui donne un courant de $I = VC\omega e^{j\pi/2}$. La puissance complexe est $S = \mathbf{VI}^*$. Dans un condensateur, $S = -jVI$. Alors, pour résumer :

$P = 0$ $\rightarrow$ pas de puissance active
$Q = VI < 0$ $\rightarrow$ fournit de la puissance réactive

On peut aussi écrire que :

$$Q = \frac{V^2}{X_C} = V^2 C\omega = \frac{I^2}{C\omega} \tag{2.18}$$

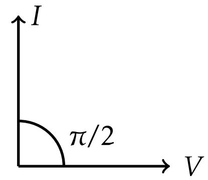


FIGURE 2.6 – Diagramme vectoriel de la tension et du courant dans une capacitance

2.2 Charges

2.2.1 Charge inductive

Dans une charge inductive (voir figure 2.7), on retrouve des éléments résistifs et inductifs. La tension V est la référence de phase ($V = V\angle 0$), et on définit $V_m = \sqrt{2}V$, où la tension est $v(t) = V_m \cos(\omega_0 t)$.

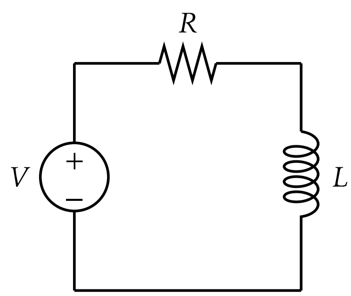


FIGURE 2.7 – Charge inductive

L'impédance de cette charge est :

$$Z = R + jX_L$$

ou sous forme polaire, $Z = |Z|\angle\phi$. La quantité $|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ et $\phi = \tan^{-1}\frac{X_L}{R}$.

Alors,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{Z} = \frac{V\angle 0}{|Z|\angle\phi} = \frac{V}{|Z|}\angle(-\phi) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}\angle(-\phi)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_L > 0}{R > 0}\right) \Rightarrow 0 < \phi < \pi/2$$

Le diagramme vectoriel pour ce type de charge est donné dans la figure 2.8. On voit bien que dans une charge inductive, le courant est en arrière par rapport à la tension.

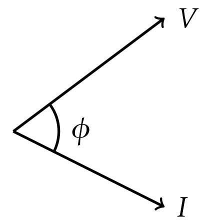


FIGURE 2.8 – Diagramme vectoriel d'une charge inductive

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{VI}^* = VI\angle\phi \\ &= VI\cos\phi + jVI\sin\phi \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |S| &= VI \text{ (puissance complexe) [VA]} \\ Q &= VI\sin\phi \text{ (puissance réactive) [VAR]} \\ P &= RI^2 = VI\cos\phi \text{ (puissance active) [W]} \end{aligned}$$

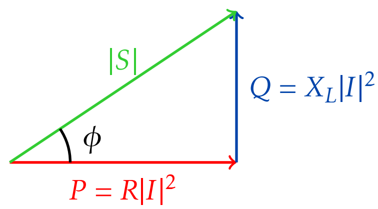


FIGURE 2.9 – Diagramme de puissance d'une charge inductive

2.2.2 Charge capacitive

Dans une charge capacitive (voir figure 2.10), on retrouve des éléments résistifs et capacitifs. La tension V est la référence de phase ($V = V\angle 0$), et on définit $V_m = \sqrt{2}V$, où la tension est $v(t) = V_m\cos(\omega_0 t)$.

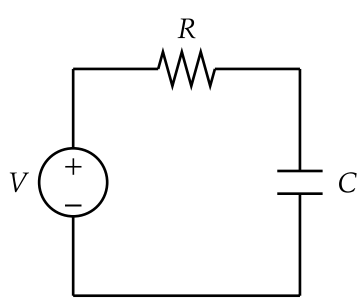


FIGURE 2.10 – Charge capacitive

L'impédance de cette charge est :

$$Z = R - jX_C$$

ou sous forme polaire, $Z = |Z|\angle\phi$. La quantité $|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ et $\phi = \tan^{-1}\frac{-X_C}{R}$.

Alors,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{Z} = \frac{V\angle 0}{|Z|\angle -\phi} = \frac{V}{|Z|}\angle(+\phi) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}\angle(+\phi)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-X_C < 0}{R > 0}\right) \Rightarrow -\pi/2 < \phi < 0$$

Le diagramme vectoriel d'une charge capacitive est donné dans la figure 2.11. On voit bien que le courant est en avance par rapport à la tension.

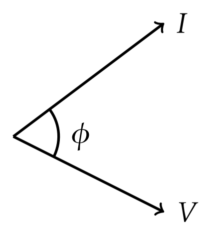


Figure 2.11 – Diagramme vectoriel d'une charge capacitive

La puissance complexe est $S = \mathbf{VI}^* = VI\angle\phi = VI\cos\phi + jVI\sin\phi$.

$$\begin{aligned} |S| &= VI \text{ (puissance complexe) [VA]} \\ Q &= -I^2X_C = VI\sin\phi \text{ (puissance réactive) [VAR]} \\ P &= RI^2 = VI\cos\phi \text{ (puissance active) [W]} \end{aligned}$$

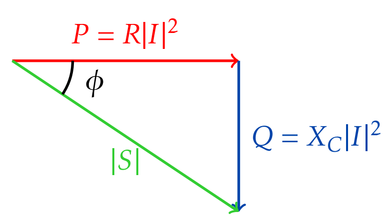


Figure 2.12 – Diagramme de puissance d'une charge capacitive

Exemple 1

Une charge industrielle est branchée à une ligne de transmission de 240V. La charge consomme une puissance active de 25kW et une puissance réactive de 16kVAR. Calculer :

1. Le facteur de puissance f_p
2. Le courant I
3. La charge Z

---

1. Le facteur de puissance $f_p = \cos\phi$. Si on regarde sur les diagrammes de puissances, on trouve que

$$\tan\phi = \frac{Q}{P} = 32.62°.$$

Ceci veut dire que le facteur de puissance est :

$$f_p = \cos(32.62°) = 0.84 \qquad \text{(arrière)} \qquad (Q > 0)$$

2. Pour trouver le courant, on sait que $P = VI\cos\phi$. Donc :

$$I = \frac{P}{V\cos\phi} = \frac{25\times 10^3}{(240)(0.84)} = 123.67\angle(-32.62°)$$

3. Il y a deux méthodes possibles pour obtenir la charge Z

a) Utiliser les puissances :

$$P = R|I|^2 \Rightarrow R = \frac{P}{|I|^2} = \frac{25\times 10^3}{(123.67)^2} = 1.63\Omega$$
$$Q = X|I|^2 \Rightarrow X = \frac{Q}{|I|^2} = \frac{16\times 10^3}{(123.67)^2} = 1.05\Omega$$

Alors $Z = 1.63 + j1.05\Omega = 1.94\angle(32.62°)$.

b) Utiliser la tension et le courant :

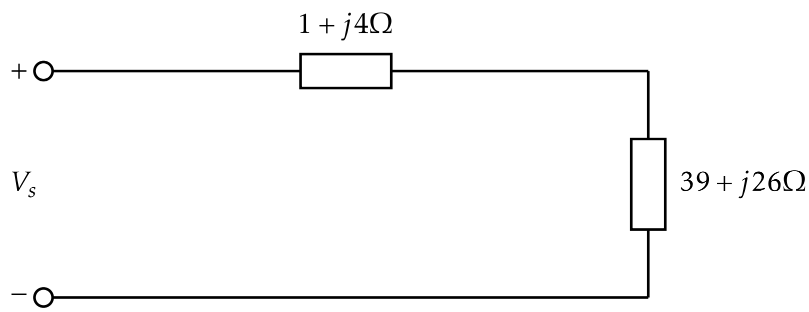
$$Z = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{240\angle 0}{123.67\angle(-32.62°)} = 1.94\angle(32.62°)$$

EXEMPLE 2

Une charge ayant une impédance de $39+j26\Omega$ est alimentée par une source de $250V_{RMS}$. La ligne qui alimente la charge a une impédance de $1+j4\Omega$.

1. Calculer le courant de charge I_L et la tension V_L.
2. Calculer la puissance active et réactive consommée par la charge.
3. Calculer les pertes dans la ligne.
4. Calculer la puissance active et réactive fournie par la source.

Le circuit est :



1. Le courant de la charge est le courant total circulant dans le circuit.

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}}{Z_T} = \frac{250\angle 0}{40+j30} = 5\angle(-36.87°)\text{ A}$$
$$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}_L Z_L = 5\angle(-36.87°)\cdot(39+j26) = 234-j13 = 234.36\angle(-3.18°)\text{ V}$$

2. Puissances :

$$\begin{aligned} S = \mathbf{VI}^* &= (234.36\angle(-3.18°))(5\angle(+36.87°)) \\ &= (234-j13)(4+j3) \\ &= 975+j650\text{ VA} \end{aligned}$$

Donc : $P = 975$ W, $Q = 650$ VAR

3. Les pertes sur la ligne :

$$P = R|\mathbf{I}|^2 = (1)(5)^2 = 25\text{ W}$$
$$Q = X|\mathbf{I}|^2 = (4)(5)^2 = 100\text{ VAR}$$

Habituellement, lorsqu'on parle de pertes sur la ligne, on ne parle que de P.

4. Puissances active et réactive de la source (encore ici, on peut utiliser deux méthodes) :

a) Somme des puissances connues :

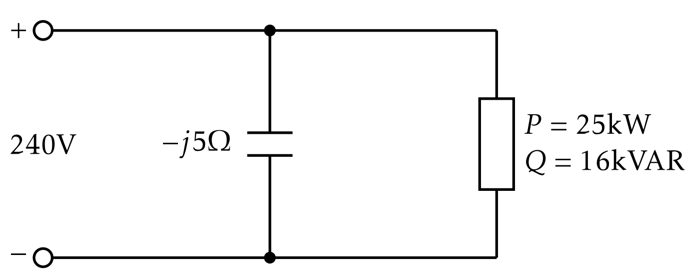
$$\begin{aligned} S &= S_{ligne} + S_{charge} \\ &= (25 + j100) + (975 + j650) \\ &= 1000 + j750 \text{ VA} \end{aligned}$$

b) Tension et courant

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{VI}^* \\ &= (250)(5\angle(36.87°)) \\ &= (250)(4 + j3) \\ &= 1000 + j750 \text{ VA} \end{aligned}$$

2.3 Compensation du facteur de puissance

On va se servir d'un exemple pour démontrer le principe de correction du facteur de puissance. Le but est d'augmenter le facteur de puissance (habituellement, on veut ramener le facteur de puissance près de 1). On reprend l'exemple 1, mais cette fois on ajoute un condensateur aux bornes de la charge.



On veut trouver a) f_p' et b) le courant I_s.

a) Le facteur de puissance est :

$$f_p' = \frac{P'}{|S'|} = \frac{P'}{\sqrt{(P')^2 + (Q')^2}}$$

La puissance active $P' = P = 25$ kW (puisque le condensateur n'ajoute pas de puissance active au circuit), et la puissance réactive $Q' = Q + Q_C$.

$$\begin{aligned}
Q_C &= -|\mathbf{I}|^2 X_C = -\frac{|V|^2}{X_C} = -\frac{240^2}{5} = -11.52 \text{ kVAR} \\
Q' &= 16 - 11.52 = 4.48 \text{ kVAR}
\end{aligned}$$

Donc,

$$f_p' = \frac{25}{\sqrt{(25)^2 + (4.48)^2}} = 0.98 \text{ (arrière)}$$

Le facteur de puissance est maintenant 0.98, comparativement à 0.84 dans l'exemple 1.

b) On peut trouver le courant à l'aide des puissances :

$$S' = \mathbf{V}\mathbf{I}^*$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^* &= \frac{S'}{\mathbf{V}} = \frac{(25 + j4.48) \times 10^3}{240} = 104.17 + j18.67A \\
\mathbf{I} &= 105.83\angle(-10.16°)
\end{aligned}$$

Si on compare,

Charge non compensée	Charge compensée
$\lvert I\rvert = 123$ A	$\lvert I\rvert = 106$ A
$f_p = 0.84$	$f_p = 0.98$
Pertes $R\lvert I\rvert^2 \nearrow$	Pertes $R\lvert I\rvert^2 \searrow$

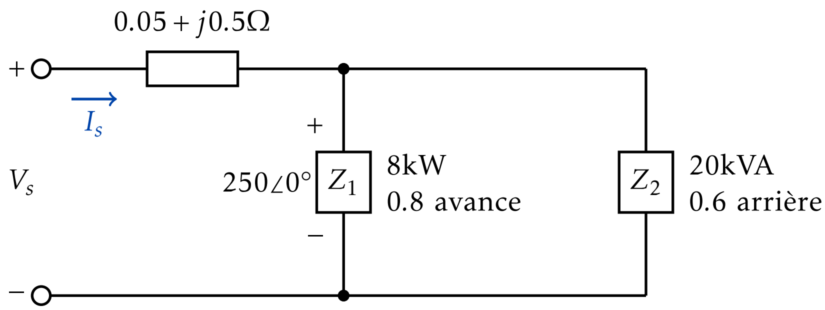
Les pertes sur la ligne de transport (qui ne sont pas montrées sur la figure ci-haut) sont RI^2. L'ajout du condensateur a permis de réduire le courant et donc les pertes sur la ligne de transport. Dans ce cas, les pertes ont chuté de :

$$\frac{R|I|^2 - R(|I'|)^2}{R|I|^2} = \frac{123^2 - 106^2}{123^2} = 25.7\%$$

La puissance fournie par la source est alors réduite aussi.

Exemple 3

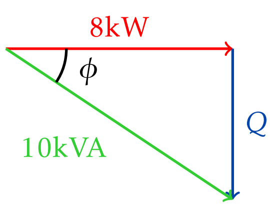
Pour le circuit suivant,



1. Déterminer le facteur de puissance des deux charges en parallèle.
2. Déterminer l'amplitude du courant I_S, la puissance active perdue dans la ligne et la puissance apparente fournie par la source.
3. Si la fréquence de la source est 60Hz, calculer la valeur du condensateur nécessaire pour corriger le facteur de puissance à 1. Recalculer les valeurs de la question 2.

---

1) $S_t = S_1 + S_2$

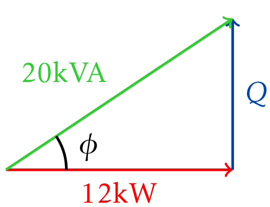


$$f_{p_1} = \frac{P_1}{S_1} \Rightarrow |S_1| = \frac{P_1}{f_{p_1}} = 10 \text{ kVA}$$

$$Q_1 = \sqrt{|S_1|^2 - P_1^2} = -6 \text{ kVAR}$$

Donc, $S_1 = 8 - j6$ kVA.

On sait que $|S_2| = 20$ kVA :



$$P_2 = |S_2| \cdot f_p = 20 \cdot 0.6 = 12 \text{ kW}$$

$$Q_2 = \sqrt{|S_2|^2 - P_2^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ kVAR}$$

Donc $S_L = S_{L1} + S_{L2} = 20 + j10$ kVA.

La puissance active totale des deux charges, P_t, est 20 kW. Donc :

$$f_p = \frac{P_t}{|S_t|} = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 10^2}} = 0.894 \text{ (arrière)}$$

On aurait aussi pu trouver l'angle entre la tension et le courant :

$$\mathbf{I}_S^* = \frac{S_t}{\mathbf{V}} = \frac{20 + j10}{0.25} = 80 + j40 \Rightarrow \mathbf{I}_S = 80 - j40 \text{ A} = 89.44\angle(-26.57°) \text{ A}$$

Et, $f_p = \cos(0° + 26.57°) = 0.894$ (arrière).

2. Courant $\mathbf{I}_S$, puissance active perdue dans la ligne et puissance apparente fournie par la source.

Le courant de la source est le même que celui dans les charges, soit $89.44\angle(-26.57)$A. On sait que : $S_s = S_{ligne} + S_{charge}$. La puissance apparente totale dans la charge fut calculée dans la partie 1 : $S_{charge} = 20 + j10$ kVA. La puissance apparente dans la ligne est :

$$S_{ligne} = \mathbf{V}\mathbf{I}^* = R_{ligne}|\mathbf{I}|^2 + jX_{ligne}|\mathbf{I}|^2 = (89.44)^2(0.05 + j0.5) = 400 + j4000 \text{ VA}$$

Donc la puissance apparente fournie par la source est :

$$\begin{aligned} S_s &= S_{ligne} + S_{charge} \\ &= (0.4 + j4) + (20 + j10) \text{ kVA} \\ &= 20.4 + j14 \text{ kVA} \end{aligned}$$

3. On veut corriger le facteur de puissance à 1. Ceci veut dire qu'il faut éliminer la puissance réactive consommée par les charges.

$$\begin{aligned} Q_C &= -Q_S = -10 \text{ kVAR} \\ X_C &= \frac{|\mathbf{V}|^2}{Q} = \frac{250^2}{10 \times 10^3} = -6.25\ \Omega \\ X_C &= -\frac{1}{C\omega} = -6.25 \Rightarrow C = 424.4\mu\text{F} \end{aligned}$$

La puissance apparente totale de la charge est maintenant $|S| = P = 20$kVA. Le courant est

$$|\mathbf{I}| = \frac{20 \times 10^3}{250} = 80\text{A}$$

La puissance perdue dans la ligne est maintenant :

$$S_{ligne} = R|\mathbf{I}|^2 + jX|\mathbf{I}|^2 = (80)^2(0.05 + j0.5) = 320 + j3200 \text{ VA}$$

Donc la puissance totale fournie par la source est :

$$\begin{aligned} S_s &= S_{ligne} + S_{charge} \\ &= (0.32 + j3.2) + (20 + j0) \text{ kVA} \\ &= 20.32 + j3.2 \text{ kVA} \end{aligned}$$

* Les pertes sur la ligne ont chuté de 400 - 320 = 80 W.

2.3.1 Circuit résonant (série)

Si on considère le circuit suivant (figure 2.13) :

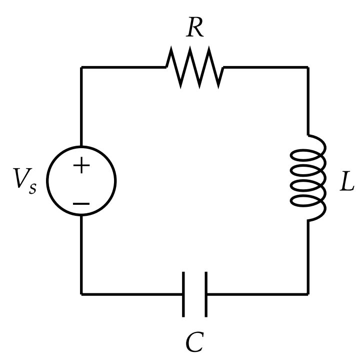


Figure 2.13 – Circuit RLC

L'impédance $Z = R + j(X_L - X_C)$.

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \end{aligned}$$

On étudie cas par cas le comportement de ce circuit selon l'amplitude des impédances. On s'intéresse à la phase de l'impédance totale.

1. Si $X_L > X_C$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{X_L - X_C}{R} > 0 \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \in [0, \pi/2] \\ &\Rightarrow 0 < \phi < \pi/2 \end{aligned}$$

Le circuit se comporte comme une charge inductive.

2. Si $X_L < X_C$

$$\begin{aligned}&\rightarrow \frac{X_L - X_C}{R} < 0 \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \in [-\pi/2, 0]\\&\Rightarrow -\pi/2 < \phi < 0\end{aligned}$$

Le circuit se comporte comme une charge capacitive.

3. Si $X_L = X_C$

$$\begin{aligned}&\rightarrow \frac{X_L - X_C}{R} = 0 \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = 0\\&\Rightarrow \phi = 0\end{aligned}$$

Le circuit se comporte comme une charge résistive. Dans ce cas, lorsque $X_L = X_C$,

$$X_L = X_C \Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

où ω_0 est la fréquence de résonance.

On peut résumer :

1. $\omega > \omega_0 \Rightarrow X_L > X_C$. Le circuit se comporte comme une charge RL.
2. $\omega < \omega_0 \Rightarrow X_L < X_C$. Le circuit se comporte comme une charge RC.
3. $\omega = \omega_0 \Rightarrow X_L = X_C$. Circuit résonant.