Chapitre 3

Circuits triphasés équilibrés

Les circuits triphasés forment la base du réseau de distribution de l'électricité. On se sert de circuits triphasés entre les génératrices et les réseaux industriels et résidentiels. Le système triphasé transporte l'énergie électrique jusqu'à une subdivision résidentielle, par exemple, où elle est ensuite distribuée de façon monophasée.

Les circuits triphasés ont quelques avantages par rapport aux circuits monophasés qui rendent leur utilisation très attrayante.

1. Pour les mêmes dimensions, un moteur triphasé est environ 150% plus puissant qu'un moteur monophasé.
2. Dans un système monophasé, la puissance oscille à la fréquence du réseau ; elle passe par zéro à tous les cycles. Dans un système triphasé, la puissance ne devient jamais nulle ; ceci simplifie le design et l'opération de moteurs triphasés.
3. Dans un système triphasé équilibré, les conducteurs ont seulement besoin d'être environ 75% de la taille des conducteurs d'un système monophasé. Bien qu'il y ait deux fils de plus, cette réduction de taille permet quand même de réaliser des économies.

3.1 Introduction

Soit un système de transmission de l'énergie électrique, montré à la figure 3.1.

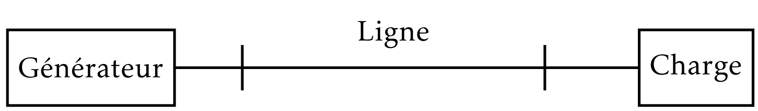


Figure 3.1 – Système de transmission d'énergie électrique

Le générateur fournit une tension fixe ; l'énergie est emportée aux consommateurs par une ligne de distribution (ou plus précisément un réseau de distribution). La charge peut représenter n'importe quoi : une grande industrie, une entreprise ou une maison. Les charges peuvent être énormes (comme les machines d'un moulin à pâtes et papier) ou faible, comme votre grille-pain.

La ligne de distribution a une impédance non-négligeable ; bien qu'on choisit des conducteurs ayant une faible résistivité, sur de longues distances cette impédance ne peut pas être ignorée.

En monophasé, on a le circuit de la figure3.2, où $v(t) = \sqrt{2}V\cos(\omega t)$; $v(t)$ est une tension fixe.

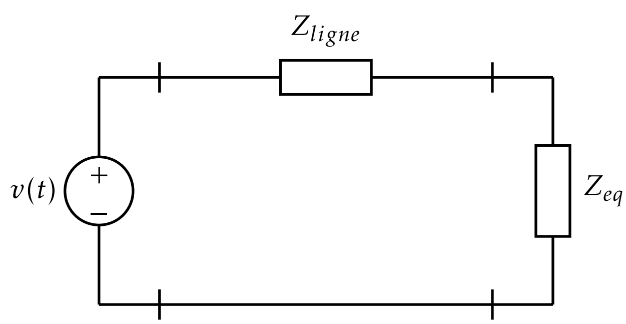


FIGURE 3.2 – Schéma monophasé de transmission d'électricité

La tension dans un réseau électrique est fixe (ex : dans le réseau résidentiel, c'est 120V). Pour fournir plus de puissance, il faut augmenter le courant. Par contre, lorsque la puissance augmente et on augmente alors le courant, les pertes sur la ligne vont augmenter aussi ($P = RI^2$). Pour avoir des pertes minimales, il faut alors réduire les pertes sur la ligne.

$$P_{ligne} = R_{ligne}I^2 \tag{3.1}$$

et

$$R_{ligne} = \frac{\rho}{A} \tag{3.2}$$

où A est la surface du conducteur et ρ est la résistivité du matériau.

Si on a plusieurs câbles en parallèle (de même impédance), comme à la figure 3.3, la résistance équivalente va chuter d'un facteur $1/N$.

On peut assembler le circuit monophasé équivalent, à la figure 3.4.

Existe-t-il un système permettant de diminuer le nombre de câbles sur la ligne ?

⇒ Utilisation d'un système polyphasé équilibré.

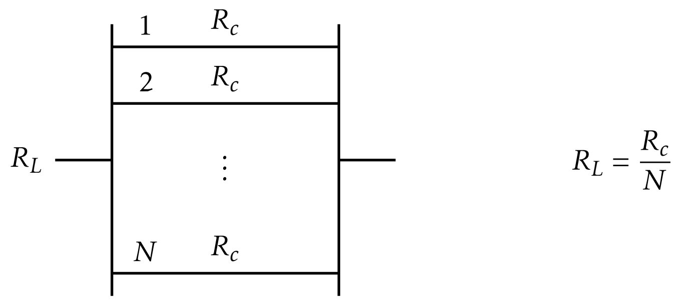


Figure 3.3 – Câbles en parallèle

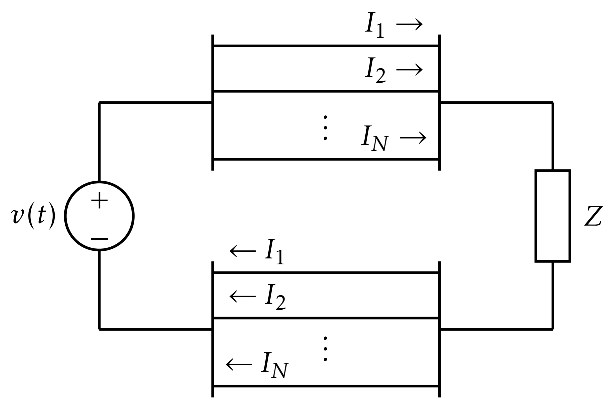


Figure 3.4 – Circuit monophasé d'un système à plusieurs câbles

Définition 1 : Un système polyphasé équilibré est un système composé d'une source (générateur) polyphasée équilibrée et une charge polyphasée équilibrée.

Définition 2 : Une source polyphasée d'ordre p est une source composée de p sources de tension de même amplitude et décalées d'un angle égal à $2\pi/p$.

$$V_1 = V\angle(0°);\ V_2 = V\angle\left(\frac{-2\pi}{p}\right) \ldots V_k = V\angle\left(\frac{-(k-1)2\pi}{p}\right) \ldots V_p = V\angle\left(\frac{-(p-1)}{p}2\pi\right)$$

Définition 3 : Une charge polyphasée est une charge composée par p impédances identiques, comme à la figure 3.15.

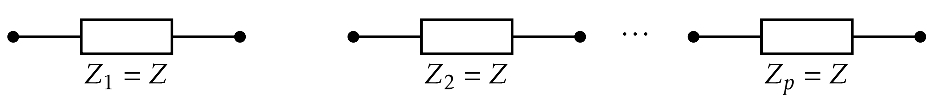


Figure 3.5 – Charge triphasée

Un exemple de circuit polyphasé est montré à la figure 3.6.

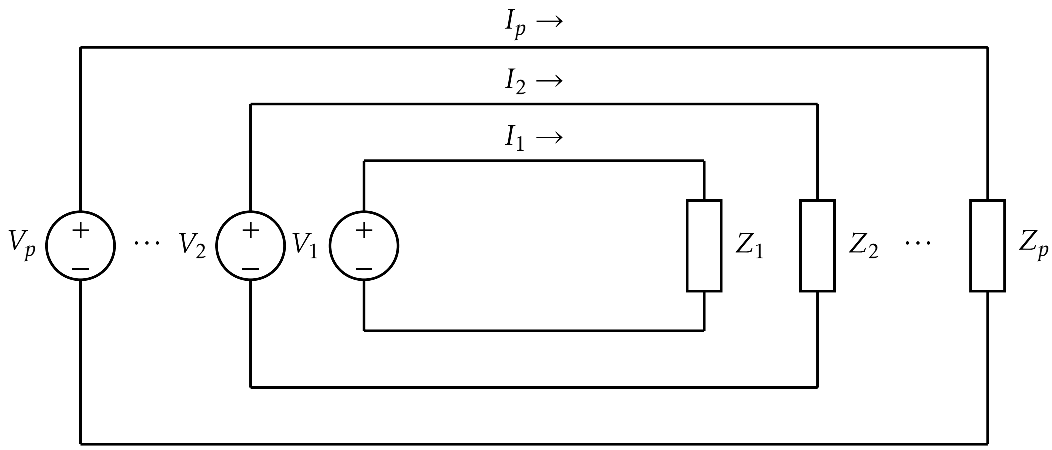


FIGURE 3.6 – Circuit polyphasé

Objectif : Diminuer le nombre de câbles sur la ligne. On veut diminuer le nombre de câbles afin de diminuer les coûts. Les courants sont :

$$I_1 = \frac{V_1}{Z} = \frac{V\angle 0}{Z}, \quad I_2 = \frac{V_2}{Z} = \frac{V}{Z}e^{-j\frac{2\pi}{p}}, \quad \ldots, \quad I_p = \frac{V_p}{Z} = \frac{V}{Z}e^{-j(\frac{p-1}{p}2\pi)}$$

Si on somme les courants :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} I_i &= I_1 + I_2 + \cdots + I_p \\
&= \frac{V}{Z}e^{-j0} + \frac{V}{Z}e^{-j\frac{2\pi}{p}} + \cdots + \frac{V}{Z}e^{-j(\frac{p-1}{p}2\pi)} \\
&= \frac{V}{Z}\left(e^{-j(\frac{2\pi}{p}\times 0)} + e^{-j(\frac{2\pi}{p}\times 1)} + \cdots + e^{-j(\frac{2\pi}{p}\times(p-1))}\right) \\
&= \frac{V}{Z}\left[\left(e^{-j\frac{2\pi}{p}}\right)^0 + \left(e^{-j\frac{2\pi}{p}}\right)^1 + \cdots + \left(e^{-j\frac{2\pi}{p}}\right)^{p-1}\right] \\
&= \frac{V}{Z}\left[\frac{1-\left(e^{-j\frac{2\pi}{p}}\right)^p}{1-\left(e^{-j\frac{2\pi}{p}}\right)}\right] = \frac{V}{Z}\left[\frac{1-e^{-j2\pi}}{1-\left(e^{-j\frac{2\pi}{p}}\right)}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Dans un système polyphasé équilibré, la somme des courants est zéro.

On peut donc réduire le circuit à celui de la figure 3.7.

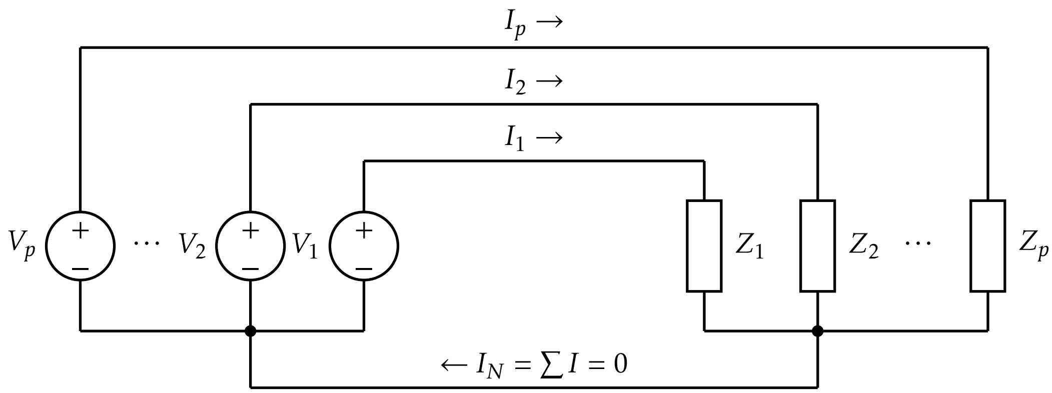


FIGURE 3.7 – Circuit polyphasé simplifié

3.2 Système triphasé

Un système triphasé est un système polyphasé d'ordre 3 ($p = 3$). On a déjà énuméré quelques avantages des systèmes triphasés.

3.2.1 Utilisation

On utilise le triphasé pour la génération et le transport de l'énergie électrique.

Charges :

Industries	moyenne, grosse : 3ϕ, V > 2.4kV
Commerce, petites industries	3ϕ, 208 < V < 600
Résidentiel	1ϕ, V = 120V

3.2.2 Générateur 3ϕ

Un générateur triphasé est une machine synchrone composée d'un rotor (aimant tournant) et de 3 bobinages fixes. Les bobinages sont séparés de 120°, autour du rotor. Puisqu'ils sont séparés, physiquement, de 120°, les tensions créées dans les bobinages A, B, et C, sont déphasées de 120° :

$$\begin{aligned} v_A(t) &= V_m \sin(\omega t) \\ v_B(t) &= V_m \sin(\omega t + 120°) \\ v_C(t) &= V_m \sin(\omega t - 120°) \end{aligned}$$

La séquence est positive : on appelle ceci la séquence **inverse**. Dans la rotation négative (séquence directe) :

$$\begin{aligned} v_A(t) &= V_m \sin(\omega t) \\ v_B(t) &= V_m \sin(\omega t - 120°) \\ v_C(t) &= V_m \sin(\omega t + 120°) \end{aligned}$$

3.2.3 Séquence (ou phase) d'un système triphasé

La séquence directe ABC est montrée à la figure 3.8.

$$\begin{aligned} v_A(t) &= V_m \sin(\omega t) \\ v_B(t) &= V_m \sin(\omega t - 120°) \\ v_C(t) &= V_m \sin(\omega t + 120°) \end{aligned}$$

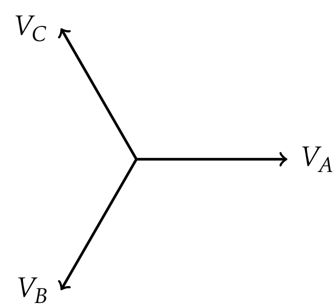


Figure 3.8 – Séquence directe

La séquence inverse ACB est montrée à la figure 3.9.

$$\begin{aligned} v_A(t) &= V_m \sin(\omega t) \\ v_B(t) &= V_m \sin(\omega t + 120°) \\ v_C(t) &= V_m \sin(\omega t - 120°) \end{aligned}$$

3.3 Source de tension triphasée équilibrée

Une source de tension triphasée équilibrée est composée de 3 sources de tension monophasées de même amplitude ($\sqrt{2}V$) et décalée de $2\pi/3$, comme à la figure 3.10.

$$V_A = V\angle 0 \qquad V_B = V\angle(-2\pi/3) \qquad V_C = V\angle(+2\pi/3)$$

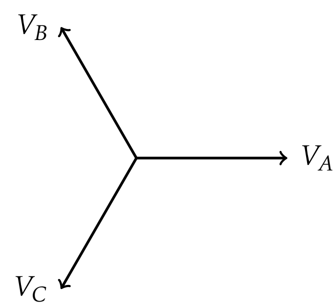


Figure 3.9 – Séquence directe

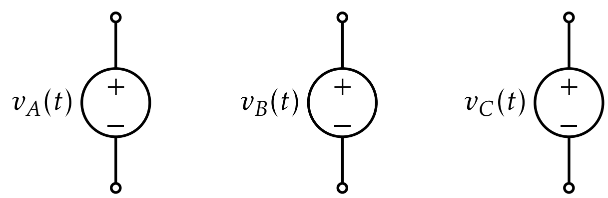


Figure 3.10 – Source triphasée

Il y a deux combinaisons possibles pour brancher ces trois sources :

1. Connection en Y (aussi appelé connection *étoile*)
2. Connection en Δ (aussi appelé connection *triangle*)

3.3.1 Connection en Y

La connection Y d'une source triphasée est montrée à la figure 3.11.

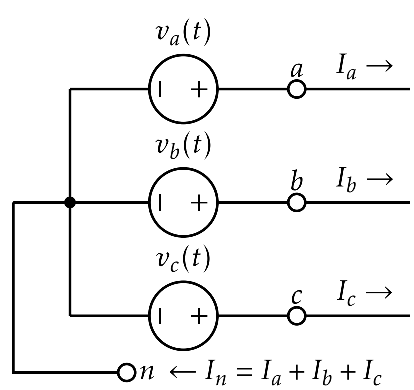


Figure 3.11 – Source triphasée en connection Y

Les tensions V_{an}, V_{bn} et V_{cn} sont appelés **tensions de phase** ; ce sont les tensions Ligne-

Neutre. Les courants I_a, I_b et I_c sont les **courants de ligne**.

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_a = V\angle 0 \\ V_{bn} &= V_b = V\angle(-120°) \\ V_{cn} &= V_c = V\angle(+120°) \end{aligned}$$

Dans un système triphasé équilibré, les trois courants ont la même amplitude, et sont déphasés de $2\pi/3$.

$$I_a = I\angle(\phi) \qquad I_b = I\angle(\phi - 2\pi/3) \qquad I_c = I\angle(\phi + 2\pi/3)$$

Le courant du neutre est $I_n = I_a + I_b + I_c = 0$.

Tensions de ligne

On peut aussi calculer la tension entre les différentes lignes, comme à la figure 3.12.

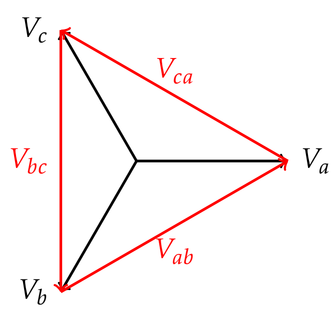


FIGURE 3.12 – Tensions entre les lignes

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_a - V_b = V\angle 0° - V\angle(-120°) = \sqrt{3}V\angle(30°) \\ V_{bc} &= V_b - V_c = V\angle(-120°) - V\angle(+120°) = \sqrt{3}V\angle(-90°) \\ V_{ca} &= V_c - V_a = V\angle(+120°) - V\angle(0°) = \sqrt{3}V\angle(150°) \end{aligned}$$

Les tensions V_{ab}, V_{bc} et V_{ca} forment un système triphasé équilibré direct, de séquence (ab)-(bc)-(ca).

Dans le système résidentiel,

$$V_{L-N} = 120V, \qquad V_{L-L} = \sqrt{3}\cdot 120 = 208V$$

Les tensions ligne-ligne (L-L) sont en avance de 30° par rapport aux tensions ligne-neutre (L-N) et supérieures d'un facteur $\sqrt{3}$ (figure 3.13).

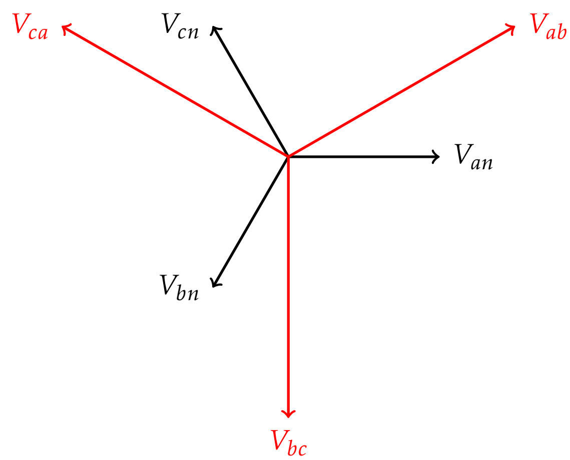


FIGURE 3.13 – Tensions entre les lignes (Y)

3.3.2 Connection en Δ

La connection Δ d'une source triphasée est montrée à la figure 3.14.

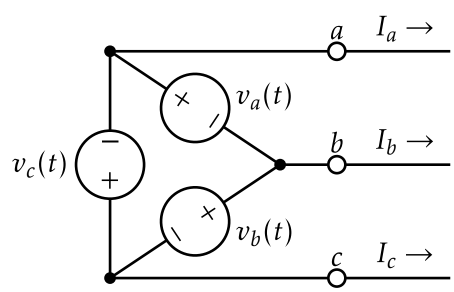


FIGURE 3.14 – Source triphasée en connection Δ

Les tensions ligne-ligne sont :

$$V_{ab} = V_a = V\angle 0$$
$$V_{bc} = V_b = V\angle(-120°)$$
$$V_{ca} = V_c = V\angle(+120°)$$

Ici, les tensions ligne-ligne sont les même que celles des sources. Remarquer aussi qu'il n'y a pas de neutre.

3.4 Charge triphasée

Une charge triphasée est une charge composée de trois charges monophasées de même impédance, comme à la figure 3.15.

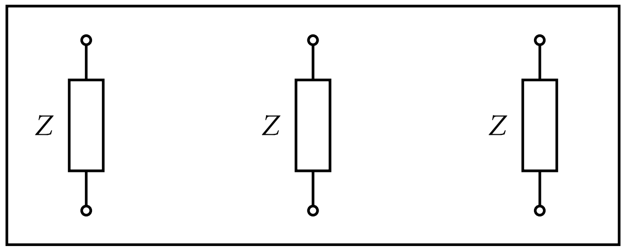


FIGURE 3.15 – Charge triphasée

3.4.1 Connection en Y

La connection Y d'une charge triphasée est montrée à la figure 3.16. À l'équilibre,

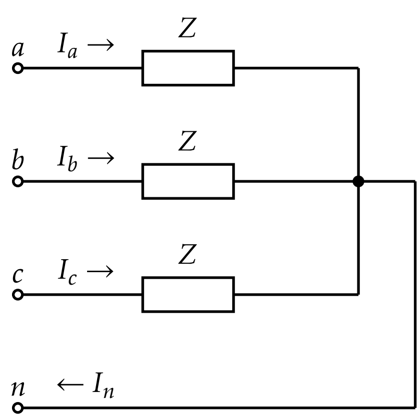


FIGURE 3.16 – Charge triphasée en connection Y

$I_n = \sum I = 0$.

Si $Z = Z\angle\phi$:

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z}\angle(-\phi) \qquad I_b = \frac{V_{bn}}{Z}\angle(-\phi) \qquad I_c = \frac{V_{cn}}{Z}\angle(-\phi)$$

Le diagramme vectoriel de cette charge est montré à la figure 3.17.

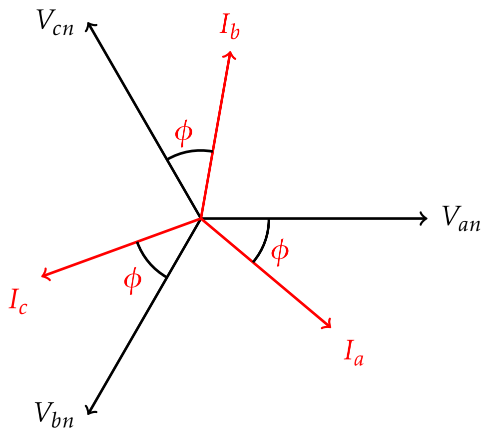


Figure 3.17 – Tensions entre les lignes

3.4.2 Connection en Δ

La connection Δ d'une charge triphasée est montrée à la figure 3.18. Les courants I_a, I_b, et I_c sont les **courants de ligne**. Les courants I_{ab}, I_{bc}, et I_{ca} sont les **courants de charge**.

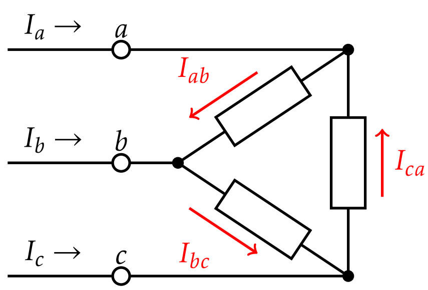


Figure 3.18 – Charge triphasée en connection Δ

Les courants de charge sont obtenus par :

$$I_{ab} = \frac{V_{ab}}{Z}\angle(-\phi) \qquad I_{bc} = \frac{V_{bc}}{Z}\angle(-120-\phi) \qquad I_{ca} = \frac{V_{ca}}{Z}\angle(+120-\phi)$$

Courants de ligne

On peut aussi calculer les courants de ligne (LKC aux noeuds) :

$$\begin{aligned}
I_a &= I_{ab} - I_{ca} = I_{ab} - I_{ab}\angle(120°) = \sqrt{3}I\angle(-30°) \\
I_b &= I_{bc} - I_{ab} = I_{ab}\angle(-120°) - I_{ab} = \sqrt{3}I\angle(-150°) \\
I_c &= I_{ca} - I_{bc} = I_{ab}\angle(+120°) - I_{ab}\angle(-120°) = \sqrt{3}V\angle(90°)
\end{aligned}$$

Les courants de ligne sont en arrière de 30° par rapport aux courants de phase et supérieurs d'un rapport $\sqrt{3}$, comme à la 3.19.

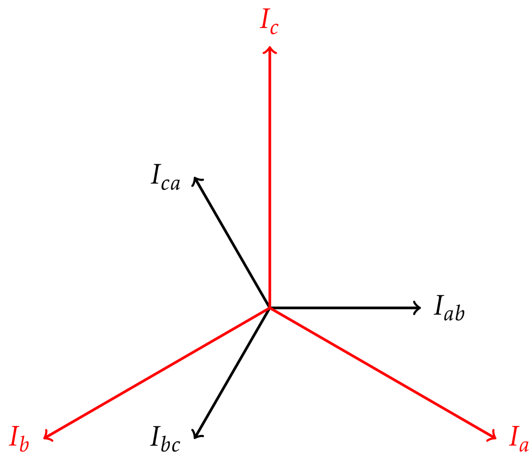


FIGURE 3.19 – Courants de ligne d'une charge 3ϕ branchée en Δ

3.5 Analyse des circuits triphasés

3.5.1 Montage Y–Y (avec neutre)

Un circuit triphasé en montage Y–Y est montré à la figure 3.20.

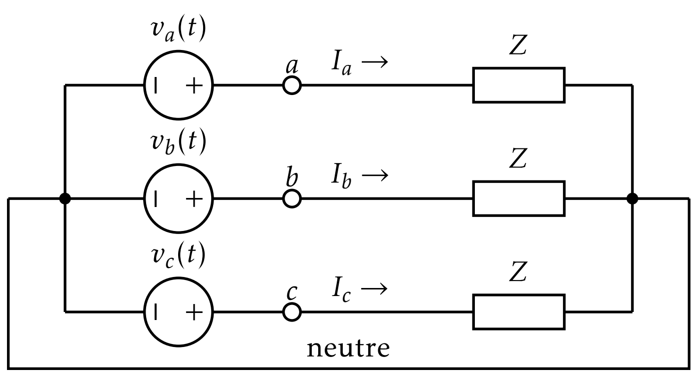


FIGURE 3.20 – Circuit triphasée en connection Y–Y

Pour analyser le circuit, on prend uniquement la phase a (figure 3.21).

On peut facilement calculer ce circuit comme tout autre circuit monophasé, en utilisant les mêmes principes et lois (loi de Kirchhoff, diviseurs de courant et tension, etc). Par

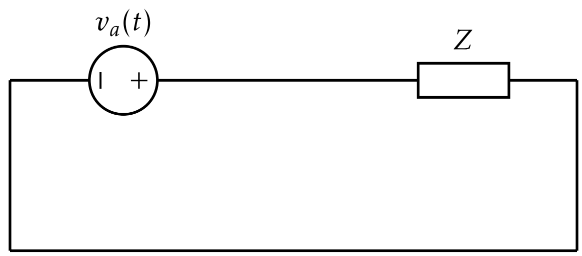


FIGURE 3.21 – Analyse de la phase a d'un circuit triphasé Y–Y

après, il suffit d'ajouter le déphasage correspondant pour les autres phases.

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{V_a}{Z} \\ I_b &= I_a \angle(-120°) \\ I_c &= I_a \angle(+120°) \end{aligned}$$

Et le courant de neutre $I_n = \sum I = 0$.

3.5.2 Montage Y-Y (sans neutre)

Les circuits branchés en forme Y–Y n'ont parfois pas de neutre, comme à la figure 3.22.

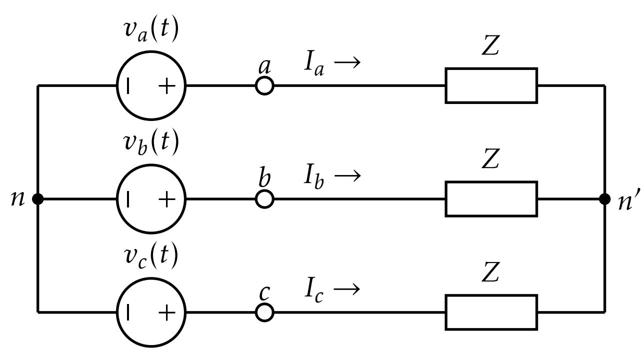


FIGURE 3.22 – Circuit triphasée en connection Y–Y sans neutre

Dans ce cas-ci, on utilise une approche un peu différente pour faire l'analyse :

$$\begin{aligned} V_{nn'} = V_a - ZI_a &= V_{an} - V_{an'} \\ &= V_{bn} - V_{bn'} \\ &= V_{cn} - V_{cn'} \end{aligned}$$

On fait la somme des tensions :

$$\sum V = 3V_{nn'} = (V_a + V_b + V_c) - (V_{an'} + V_{bn'} + V_{cn'})$$

Dans un système équilibré, $V_a + V_b + V_c = 0$, et $V_{an'} + V_{bn'} + V_{cn'} = 0$, donc $V_{nn'} = 0$. Ceci veut dire que dans un montage Y–Y (d'un circuit triphasé équilibré), les deux points n et n' sont au même potentiel.

On reprend les équations d'auparavant :

$$V_a - ZI_a = V_{nn'} = 0 \Rightarrow I_a = \frac{V_a}{Z}$$

De même,

$$I_b = \frac{V_b}{Z} \qquad I_c = \frac{V_c}{Z}$$

Aussi,

$$\sum I = I_a + I_b + I_c = \frac{1}{Z}(V_a + V_b + V_c) = 0$$

L'étude de ce circuit triphasé peut être ramenée à un circuit monophasé équivalent (figure 3.23).

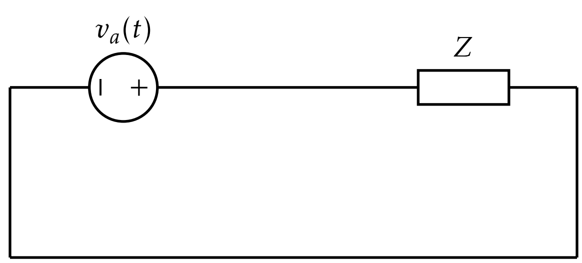


FIGURE 3.23 – Analyse de la phase a d'un circuit triphasé Y–Y sans neutre

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{V_a}{Z} \\ I_b &= I_a\angle(-120°) \\ I_c &= I_a\angle(+120°) \end{aligned}$$

3.6 Relation entre un circuit triangle et un circuit en étoile

Soit une charge Δ et une charge Y, montrés à la figure 3.24. On cherche à convertir d'une forme à une autre. Pour ques les circuits soient égaux, il faut que l'impédance mesurée entre n'importe quel 2 points soit la même dans les deux formes.

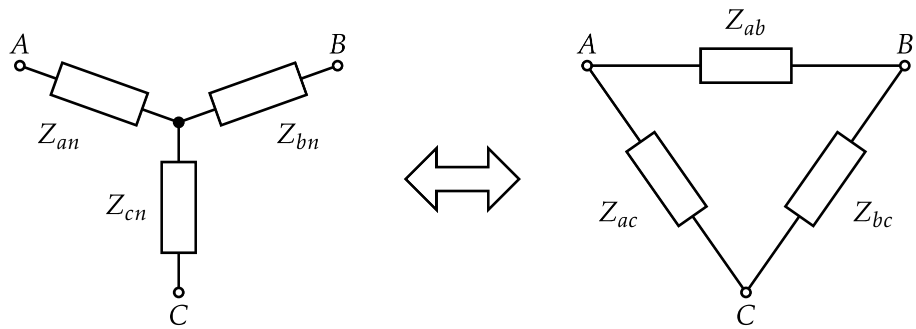


Figure 3.24 – Charges en Δ et Y

Pour le circuit en étoile :

$$
\begin{aligned}
Z_{AB} &= Z_{an} + Z_{bn} \\
Z_{BC} &= Z_{bn} + Z_{cn} \\
Z_{CA} &= Z_{cn} + Z_{an}
\end{aligned}
$$

Pour le circuit en triangle :

$$
\begin{aligned}
Z_{AB} &= Z_{ab} \| (Z_{bc} + Z_{ac}) = \frac{Z_{ab} \cdot (Z_{bc} + Z_{ca})}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ac}} \\
Z_{BC} &= Z_{bc} \| (Z_{ab} + Z_{ac}) = \frac{Z_{bc} \cdot (Z_{ac} + Z_{ab})}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ac}} \\
Z_{CA} &= Z_{ac} \| (Z_{ab} + Z_{bc}) = \frac{Z_{ac} \cdot (Z_{ab} + Z_{bc})}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ac}}
\end{aligned}
$$

Pour le circuit en étoile,

$$2Z_{an} = Z_{AB} - Z_{BC} + Z_{CA}$$

qu'on peut simplifier à :

$$Z_{an} = \frac{Z_{ab} Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}$$

De la même façon,

$$
\begin{aligned}
Z_{bn} &= \frac{Z_{bc} Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \\
Z_{cn} &= \frac{Z_{ca} Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}
\end{aligned}
$$

On peut résumer :

$$Z_Y = \frac{\text{Produit des Z adjacents du } \Delta}{\text{Somme des Z du } \Delta}$$

On peut faire une analyse semblable pour obtenir :

$$Z_{ab} = \frac{Z_{an}Z_{bn} + Z_{bn}Z_{cn} + Z_{cn}Z_{an}}{Z_{cn}}$$
$$Z_{ab} = \frac{Z_{an}Z_{bn} + Z_{bn}Z_{cn} + Z_{cn}Z_{an}}{Z_{an}}$$
$$Z_{ab} = \frac{Z_{an}Z_{bn} + Z_{bn}Z_{cn} + Z_{cn}Z_{an}}{Z_{bn}}$$

Dans le cas d'un circuit triphasé équilibré :

$$Z_\Delta = 3Z_Y$$

Exemple 1 (problème 4.7, p.196)

Une source triphasée équilibrée dont la tension de ligne est 230V est reliée à une charge triphasée en étoile de $16 + j12\Omega$.

1. Calculer le courant de ligne.
2. Si les impédances sont en triangle, quel est le courant de ligne ?

---

1. Schéma monophasé unifilaire :

On prend V_{an} comme référence de phase, donc $V_{an} = \frac{230}{\sqrt{3}}\angle 0$

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z} = \frac{230/\sqrt{3}\angle 0}{16 + j12} = 11.5/\sqrt{3}\angle(-36.87^\circ)\ \text{A}$$

Donc,

$$I_b = 11.5/\sqrt{3}\angle(-157^\circ)\ \text{A} \qquad I_c = 11.5/\sqrt{3}\angle(-83^\circ)\ \text{A}$$

2. On transforme l'impédance de la charge :

$$Z_{Y'} = \frac{1}{3}Z_\Delta = \frac{1}{3}(16 + j12)$$

Puis on calcule les courants :

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z} = \frac{230/\sqrt{3}\angle 0}{\frac{1}{3}(16+j12)} = 19.9\angle(-36.87°)\ \text{A}$$
$$I_b = 19.9\angle(-157°)\ \text{A} \qquad I_c = 19.9\angle(-83°)\ \text{A}$$

3.7 Calculs de puissance dans les circuits 3ϕ

Pour effectuer les calculs de puissance dans les circuit 3ϕ, on utilise le schéma sans neutre de la figure 3.25.

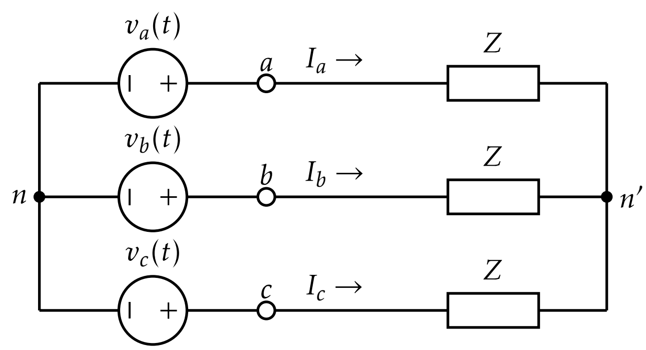


FIGURE 3.25 – Circuit triphasée en connection Y–Y sans neutre

Les tensions de phase sont :

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= V_m \cos(\omega t) \\ v_{bn}(t) &= V_m \cos(\omega t - 120°) \\ v_{cn}(t) &= V_m \cos(\omega t + 120°) \end{aligned}$$

Les courants sont alors :

$$\begin{aligned} i_a(t) &= I_m \cos(\omega t - \phi) \\ i_b(t) &= I_m \cos(\omega t - \phi - 120°) \\ i_c(t) &= I_m \cos(\omega t - \phi + 120°) \end{aligned}$$

La puissance dans chaque phase est :

$$\begin{aligned}
p_a(t) &= v_{an}(t)i_a(t) = V_m I_m \cos(\omega t)\cos(\omega t - \phi)\\
&= \frac{V_m I_m}{2}[\cos\phi + \cos(2\omega t - \phi)]\\
p_b(t) &= \frac{V_m I_m}{2}[\cos\phi + \cos(2\omega t - \phi - 120°)]\\
p_c(t) &= \frac{V_m I_m}{2}[\cos\phi + \cos(2\omega t - \phi + 120°)]
\end{aligned}$$

La puissance totale est :

$$\begin{aligned}
p(t) &= p_a(t) + p_b(t) + p_c(t)\\
&= \frac{3V_m I_m}{2}\cos\phi + \frac{V_m I_m}{2}\left[\cos(2\omega t - \phi) + \cos(2\omega t - \phi + 120) + \cos(2\omega t - \phi - 120)\right]\\
&= \frac{3V_m I_m}{2}\cos\phi = \text{cst}\\
&= 3VI\cos\phi
\end{aligned}$$

La puissance moyenne est :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = 3VI\cos\phi$$

La puissance complexe :

$$\begin{aligned}
S_a &= \mathbf{V}_a\mathbf{I}_a^*\\
&= VI\cos\phi + jVI\sin\phi\\
S_b &= VI\cos\phi + jVI\sin\phi\\
S_c &= VI\cos\phi + jVI\sin\phi
\end{aligned}$$

Donc la puissance totale est :

$$S_{3\phi} = 3VI\cos\phi + j3VI\sin\phi \tag{3.3}$$

Et alors,

$$P_{3\phi} = 3VI\cos\phi; \qquad Q_{3\phi} = 3VI\sin\phi \tag{3.4}$$

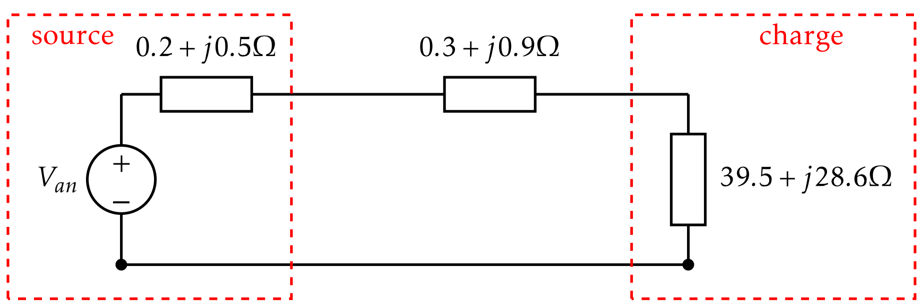
Exemple 2

Une source triphasée de 120V/phase a une impédance interne de $0.2+j0.5\ \Omega$. La source est branchée en Y. La charge Δ est branchée à travers une ligne d'impédance $0.3+j0.9\ \Omega$. L'impédance de la charge est $118.5+j85.8\ \Omega$.

1. Construire l'équivalent monophasé.
2. Calculer les courants de ligne I_a, I_b, I_c.
3. Calculer la tension aux bornes de la charge.
4. Calculer les courants de charge.
5. Calculer les tensions de ligne aux bornes de la source.

---

1. Schéma monophasé :



$$Z_Y = \frac{1}{3}Z_\Delta = \frac{1}{3}(118.5+j85.8) = 39.5+j28.6\Omega$$

2. Le courant $\mathbf{I}_a$

$$\mathbf{I}_a = \frac{120\angle 0}{(0.2+0.3+39.5)+j(0.5+0.9+28.6)} = \frac{120\angle 0}{40+j30} = 2.4\angle(-36.87°)\text{ A}$$

Donc,

$$\mathbf{I}_b = 2.4\angle(-156.87°)\text{ A}$$
$$\mathbf{I}_c = 2.4\angle(83.13°)\text{ A}$$

3. Puisque la charge est branchée en Δ, la tension aux bornes de la charge est la tension de ligne.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{an} &= I_a \cdot Z_Y = (2.4\angle(-36.87))(39.5+j28.6)\\ &= 117.04\angle(-0.96°)\text{ V}\end{aligned}$$

On est en séquence directe,

$$\mathbf{V}_{ab} = \sqrt{3}\angle(30°)\mathbf{V}_{an} = 202.72\angle(29.04°) \text{ V}$$

Et pour les deux autres tensions :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{bc} &= 202.72\angle(-90.96°) \text{ V} \\ \mathbf{V}_{ca} &= 202.72\angle(149.04°) \text{ V}\end{aligned}$$

4. Les courants de charge sont reliés aux courants de source par :

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{ab} &= \frac{1}{\sqrt{3}\angle(-30°)} I_a = 1.39\angle(-6.87°) \text{ A} \\ \mathbf{I}_{bc} &= 1.39\angle(-126.87°) \text{ A} \\ \mathbf{I}_{ca} &= 1.39\angle(113.13°) \text{ A}\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser :

$$\mathbf{I}_{ab} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{Z_\Delta} = \frac{202.72\angle(29.04°)}{118.5 + j85.8} = 1.39\angle(-6.87°) \text{ A}$$

5. La tension aux bornes de la source peut être calculée à partir du circuit monophasé.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{an} &= (Z_{ligne} + Z_Y)\mathbf{I}_a \\ &= (39.8 + j29.5)(2.4\angle(-36.87°)) \\ &= 118.9\angle(-0.32°) \text{ V}\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \sqrt{3}\angle(30°)V_{an} \\ &= 205.94\angle(29.68°) \text{ V} \\ \mathbf{V}_{bc} &= 205.94\angle(-90.32°) \text{ V} \\ \mathbf{V}_{ca} &= 205.94\angle(149.68°) \text{ V}\end{aligned}$$

3.8 Mesure de la puissance

Pour mesurer la puissance d'un circuit monophasé, on utilise un wattmètre, comme à la figure 3.26.

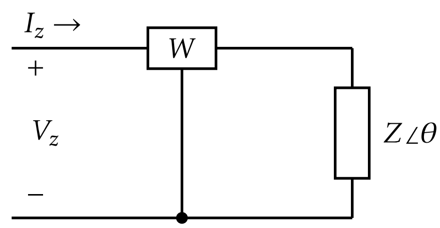


FIGURE 3.26 – Mesure de la puissance avec un wattmètre

La puissance moyenne de cette charge est donnée par :

$$p_z = \frac{1}{T}\int_0^T v_z(t) i_z(t) dt$$

Pour mesurer la puissance d'un circuit triphasé, on utilise trois wattmètres, comme à la figure 3.27.

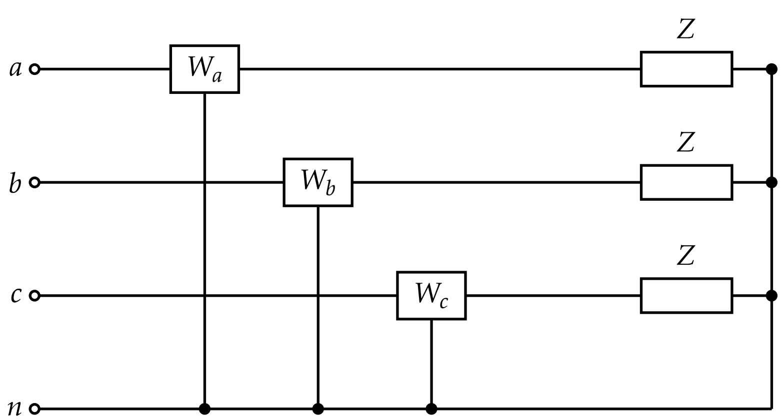


FIGURE 3.27 – Mesure de la puissance d'un circuit triphasé avec 3 wattmètres

On sait que les tensions sont :

$$\mathbf{V}_{an} = V\angle 0 \qquad \mathbf{V}_{bn} = V\angle(-120°) \qquad \mathbf{V}_{cn} = V\angle(+120°)$$

et que les courants sont :

$$\mathbf{I}_a = I\angle(-\phi) \qquad \mathbf{I}_b = I\angle(-\phi - 120°) \qquad \mathbf{I}_c = I\angle(-\phi + 120°)$$

Les tensions de ligne sont :

$$\mathbf{V}_{ab} = V_L\angle(30°) \qquad \mathbf{V}_{bc} = V_L\angle(-90°) \qquad \mathbf{V}_{ca} = V_L\angle(150°)$$

où $V_L = \sqrt{3}V$.

La puissance dans les wattmètres est donc :

$$\begin{aligned}
W_a &\Rightarrow P_a = VI\cos\phi = |V_{an}||I_a|\cos(\phi = \widehat{V_{an} \quad I_a}) \\
W_b &\Rightarrow P_b = VI\cos\phi = |V_{bn}||I_b|\cos(\phi = \widehat{V_{bn} \quad I_b}) \\
W_c &\Rightarrow P_c = VI\cos\phi = |V_{cn}||I_c|\cos(\phi = \widehat{V_{bc} \quad I_c})
\end{aligned}$$

La puissance totale est :

$$P_T = P_a + P_b + P_c = 3VI\cos\phi = \sqrt{3}V_LI\cos\phi$$

3.8.1 Méthode des 2 Wattmètres

On peut simplifier la mesure de la puissance dans un circuit triphasé en utilisant 2 wattmètres au lieu de 3, comme à la figure 3.28.

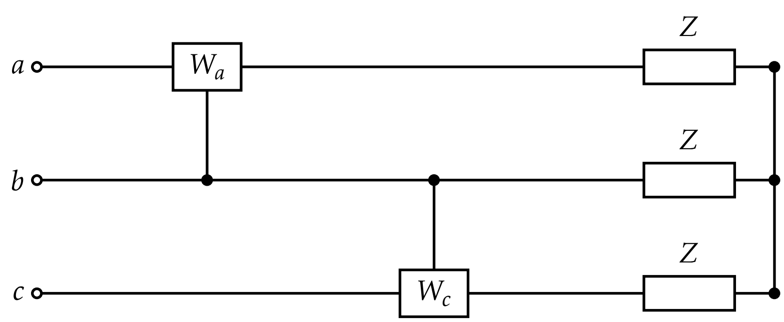


Figure 3.28 – Mesure de la puissance d'un circuit triphasé avec 2 wattmètres

Dans la configuration ci-dessus, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
W_a \Rightarrow P_a &= V_{ab}I_a\cos(\widehat{V_{ab} \quad I_a}) \\
&= V_LI\cos(30° + \phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_c \Rightarrow P_c &= V_{cb}I_c\cos(\widehat{V_{cb} \quad I_c}) \\
&= V_LI\cos(90° + \phi - 120°) \\
&= V_LI\cos(30° - \phi)
\end{aligned}$$

On additionne les puissances :

$$\begin{aligned}
P_a + P_c &= V_L I[\cos(30^\circ + \phi) + \cos(30^\circ - \phi)] \\
&= V_L I \cdot 2\left[\cos\left(\frac{\phi + 30^\circ + \phi - 30^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi + 30^\circ + \phi - 30^\circ}{2}\right)\right] \\
&= V_L I \cdot 2[\cos\phi \cos(30^\circ)] \\
&= V_L I \cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi \\
&= \sqrt{3} V_L I_L \cos\phi
\end{aligned}$$

On obtient donc la même solution qu'avec 3 wattmètres. Pour un système triphasé équilibré, on sait que $P_T = 3VI\cos\phi$, et donc :

$$P_T = P_a + P_c$$

De la même façon, si on soustrait les deux puissances :

$$\begin{aligned}
P_a - P_c &= V_L I[\cos(30^\circ + \phi) - \cos(30^\circ - \phi)] \\
&= V_L I(-1) 2\sin\phi \sin 30^\circ \\
&= -V_L I \sin\phi
\end{aligned}$$

Donc $P_c - P_a = V_L I \sin\phi$.

On sait que dans un système triphasé équilibré que $Q = 3VI\sin\phi$, donc

$$Q = \sqrt{3}(P_c - P_a)$$

Si on remplace les termes par des indices plus généraux, P_1 et P_2, on obtient :

$$\begin{aligned}
P_T &= P_1 + P_2 \\
Q_T &= \sqrt{3}(P_2 - P_1)
\end{aligned}$$

Si on regarde de plus près les mesures de P_1 et P_2,

- Pour une charge résistive, $\phi = 0$, $P_1 = P_2$.
- Pour une charge inductive, $\phi > 0$, $P_2 > P_1$.
- Pour une charge capacitive, $\phi < 0$, $P_1 > P_2$.

3.9 Résolution de problèmes avec charges multiples

Dans un système triphasé, lorsqu'on branche plusieurs charges, elles sont en parallèle. En effet, on ne veut pas que les charges aient différentes tensions à leurs bornes. Comme exemple, les appareils électro-ménagers sont conçus pour opérer à une tension fixe de 120V ; lorsqu'on branche plusieurs appareils sur une même prise, ces appareils sont en parallèle.

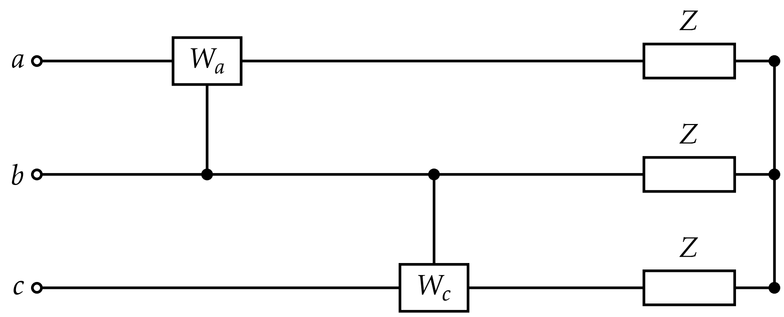
La façon la plus simple de résoudre des problèmes à charges multiples est de faire les calculs avec les puissances. De cette façon, on peut combiner les charges en une seule qui est la somme des puissance complexes des charges individuelles.

Une autre méthode consiste à convertir chaque charge en Δ. Les impédances de chaque phase sont alors en parallèle. Cette méthode fonctionne pour des charges équilibrées et déséquilibrées.

Problèmes Supplémentaires

Exemple 3

Soit le circuit suivant à 2 wattmètres. La tension de phase à la charge est 120V. Calculer



P_1 et P_2 dans chacun des cas, et vérifier les mesures de P_1 et P_2.

1. $Z = 8 + j6\Omega$
2. $Z = 8 - j6\Omega$
3. $Z = 5 + j5\sqrt{3}\Omega$
4. $Z = 10\angle(-75°)\Omega$

---

1. $Z_Y = 10\angle(36.87°)$, $V_L = 120\sqrt{3}$V, $I_L = \frac{120}{10} = 12$A.

$$\begin{aligned} P_1 &= V_L I_L \cos(30° + \phi) = 120\sqrt{3} \cdot 12 \cdot \cos(30° + 36.87°) \\ &= 979.75 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= V_L I_L \cos(30° - \phi) = 120\sqrt{3} \cdot 12 \cdot \cos(30° - 36.87°) \\ &= 2476.25 \text{ W} \end{aligned}$$

Pour vérifier, on sait que dans un système triphasé équilibré $P_T = 3RI^2 = 3(8)(12)^2 = 3456$W. La somme de P_1 et $P_2 = 979.75 + 2476.25 = 3456$W, donc les calculs sont en accord.

2. $Z_Y = 10\angle(-36.87°)$, $V_L = 120\sqrt{3}$V, $I_L = \frac{120}{10} = 12$A.

$$P_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(30° - 36.87°) = 2476.25 \text{ W}$$
$$P_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(30° + 36.87°) = 979.75 \text{ W}$$

$$P_T = 3RI^2 = 3(8)(12)^2 = 3456 \text{ W}$$
$$P_1 + P_2 = 3456 \text{ W}$$

3. $Z_Y = 10\angle(60°)$, $V_L = 120\sqrt{3}$V, $I_L = 12$A.

$$P_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(30° + 60°) = 0 \text{ W}$$
$$P_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(30° - 60°) = 2160 \text{ W}$$

$$P_T = 3RI^2 = 3(5)(12)^2 = 2160 \text{ W}$$
$$P_1 + P_2 = 2160 \text{ W}$$

4. $Z_Y = 10\angle(-75°) = 2.59 - j9.66$, $V_L = 120\sqrt{3}$V, $I_L = 12$A.

$$P_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(30° - 75°) = 1763.63 \text{ W}$$
$$P_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(30° + 75°) = -645.53 \text{ W}$$

$$P_T = 3RI^2 = 3(2.59)(12)^2 = 1118.10 \text{ W}$$
$$P_1 + P_2 = 1118.10 \text{ W}$$

Exemple 4

Un essai à deux wattmètres sur un moteur triphasé donne les résultats suivants :

$$P_1 = 2355 \text{ W} \qquad P_2 = 5950 \text{ W}$$

Les courants de ligne sont 10A et la tension entre les lignes est de 600V. Calculer le facteur de puissance du moteur.

$$P_T = P_1 + P_2 = 2355 + 5950 = 8305\text{W}$$

$$|S| = \sqrt{3}V_L I_L = \sqrt{3}(600)(10) = 10392.3\text{VA}$$

$$F_p = \frac{P}{|S|} = 0.8 \text{ (arrière)}$$

Le facteur de puissance est arrière parce que $P_2 > P_1$.

Exemple 5

Une charge Y de $216 + j63\Omega/\phi$ est branchée au réseau à travers une ligne de $0.25 + j2\Omega/\phi$. La tension de ligne à la charge est 12800V.

1. Quel est le courant de ligne ?
2. Quelle est la tension de ligne à la source ?

---

1. Courant de ligne

Le calcul est assez facile : il suffit de convertir la tension de ligne en une tension de phase (LN).

$$V_{LN} = \frac{V_L}{\sqrt{3}}\angle(-30°) = 7390.083\angle(-30°)\text{ V}$$

$$I_L = \frac{V_{LN}}{Z_Y} = \frac{7390.083\angle(-30°)}{216 + j63} = 32.845\angle(-46.26°)\text{ A}$$

2. Tension de ligne à la source

On calcule d'abord la tension ligne-neutre à la source, puis la tension ligne-ligne.

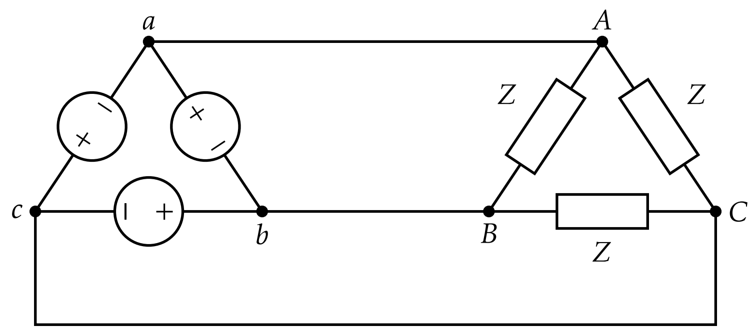
$$\begin{aligned} V_{S_{LN}} &= V_{ch_{LN}} + Z_{ligne}I_L = 7390.083\angle(-30°) + (0.25 + j2)(32.845\angle(-46.3°)) \\ &= 6453.14 + j3655.56\text{ V} \end{aligned}$$

La tension de ligne est donc :

$$V_{S_{LL}} = \sqrt{3}V_{S_{LN}}\angle(30°) = 12845.94\angle(0.47°)\text{ V}$$

Exemple 6

Soit le circuit suivant. L'impédance $Z = 600 + j450\Omega$. La tension $v_{ab} = 69\angle(0°)$kV, $v_{bc} = 69\angle(-120°)$kV et $v_{ca} = 69\angle(120°)$kV. Calculer :



1. I_{AB}, I_{BC}, I_{CA}
2. I_{aA}, I_{bB}, I_{cC}
3. I_{ba}, I_{cb}, I_{ac}

---

1. I_{AB}

En regardant la figure,

$$I_{AB} = \frac{69000\angle(0°)}{600 + j450} = 92\angle(-36.87°)\text{ A}$$

Par symétrie,

$$I_{BC} = I_{AB}\angle(-120°) = 92\angle(-156.87°)\text{ A}$$
$$I_{CA} = I_{AB}\angle(120) = 92\angle(83.13°)\text{ A}$$

2. I_{aA}

I_{aA} est le courant de ligne. Donc,

$$I_{aA} = \sqrt{3}I_{AB}\angle(-30°) = 159.35\angle(-66.87°)\text{ A}$$

Par symétrie,

$$I_{bB} = I_{aA}\angle(-120) = 159.35\angle(-186.87°)\text{ A}$$
$$I_{cC} = I_{aA}\angle(120) = 159.35\angle(53.13°)\text{ A}$$

3. I_{ba}

Le courant à la source $I_{an} = I_{aA}$. Si on transforme le courant I_{an} pour obtenir le courant I_{ba},

$$I_{ba} = \frac{1}{\sqrt{3}}I_{an}\angle(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}I_{aA}\angle(30°) = I_{AB} = 92\angle(-36.87°)\text{ A}$$

Par symétrie,

$$I_{cb} = I_{ba}\angle(-120°) = 92\angle(-156.87°) \text{ A}$$
$$I_{ac} = I_{ba}\angle(120°) = 92\angle(83.13°) \text{ A}$$

Exemple 7

Trois charges en parallèle sont alimentées à travers une ligne de $1 + j10\Omega$ par phase. La tension ligne-neutre aux charges est 7.2kV. Les trois charges sont : $L_1 = 300 + j100\Omega/\phi$ en Y, $L_2 = 5400 - j2700\Omega/\phi$ en Δ et $L_3 = 112.32 + j95.04$kVA. Calculer :

1. Puissance complexe totale à la source.
2. Le pourcentage de la puissance active délivrée aux charges.

---

1. Puissance complexe à la source

On calcule premièrement la tension de ligne aux charges.

$$\mathbf{V}_L = \sqrt{3}V_{LN}\angle(30°) = 12.47\angle(30°) \text{ kV}$$

La prochaine étape est de calculer la puissance complexe de chaque charge. Puisque la puissance complexe de la charge 3 est déjà donnée, il suffit de faire les calculs pour les charges 1 et 2.

$$S_1 = \frac{|\mathbf{V}_{LN}|^2}{Z_Y^*} = \frac{|7200|^2}{300 - j100} = 155.520 + j51.840 \text{ kVA}$$

$$S_2 = \frac{3|\mathbf{V}_{LN}|^2}{Z_\Delta^*} = \frac{3|7200|^2}{5400 + j2700} = 23.040 - j11.52 \text{ kVA}$$

La puissance complexe totale des trois charges (pour une phase) est :

$$S_L = S_1 + S_2 + S_3 = 216 + j72 \text{ kVA}$$

Le courant dans la ligne est :

$$\mathbf{I}_L = \left(\frac{S}{V}\right)^* = 30 - j10 \text{ A}$$

La puissance complexe dans la ligne est,

$$S_{ligne} = (Z_{ligne})|\mathbf{I}_L|^2 = (31.62)^2(1 + j10) = 1 + j10 \text{ kVA}$$

La puissance complexe par phase de la source est :

$$S_S = S_{ligne} + S_L = 217 + j82 \text{ kVA}$$

Et donc la puissance totale de la source :

$$S_t = 651 + j246 \text{ kVA}$$

2. Puissance active délivrée à la charge.

$$\frac{P_L}{P_S} = \frac{216}{217} = 99.54\%$$

Exemple 8

Trois charges triphasées sont branchées en parallèle. La tension de ligne aux bornes des charges est 208V. Les trois charges sont : $L_1 = 4.864$kW avec f_p 0.79 arrière, $L_2 = 17.636$kVA avec f_p 0.96 arrière et $L_3 = 73.8$A/ligne, 13853kVA. Calculer :

1. Le courant de ligne des trois charges combinées.
2. Le facteur de puissance global (des trois charges combinées).

---

1. Courant total.

On calcule en premier la tension ligne-neutre :

$$\mathbf{V}_{LN} = \frac{208}{\sqrt{3}} = 120.089 \text{ V}$$

On utilisera la tension ligne-neutre comme référence de phase, donc $\mathbf{V}_{LN} = 120.089\angle(0°)$V. On fera le calcul des courants de chaque charge pour une seule phase.

$$P_1 = \frac{4.864}{3} = 1.621 \text{ kW}$$

$$|S_1| = \frac{P_1}{f_p} = \frac{1.621}{0.79} = 2.052 \text{ kVA}$$

$$Q_1 = \sqrt{|S_1|^2 - P_1^2} = 1.259 \text{ kVAR}$$

Le courant dans la charge 1 est :

$$\mathbf{I}_1 = \left(\frac{S_1}{\mathbf{V}_{LN}}\right)^* = \left(\frac{1.621 + j1.259}{0.120089}\right)^* = 13.498 - j10.482 \text{ A}$$

Pour la charge 2 :

$$|S_2| = \frac{17.636}{3} = 5.879 \text{ kVA}$$

$$P_2 = (F_p)(|S_2|) = (0.96)(5.879) = 5.644 \text{ kW}$$

$$Q_2 = \sqrt{|S_1|^2 - P_1^2} = 1.647 \text{ kVAR}$$

Le courant dans la charge 2 est :

$$\mathbf{I}_2 = \left(\frac{S_2}{\mathbf{V}_{LN}}\right)^* = \left(\frac{5.644 + j1.647}{0.120089}\right)^* = 46.998 - j13.717 \text{ A}$$

Pour la charge 3, on connaît l'amplitude du courant, mais pas la phase. Donc,

$$|S_3| = |\mathbf{V}_{LN}||\mathbf{I}_L| = 8.863 \text{ kVA}$$

$$Q_3 = \frac{13.853}{3} = 4.618 \text{ kVAR}$$

$$P_3 = \sqrt{|S_3|^2 - Q_3^2} = 7.564 \text{ kW}$$

Le courant dans la charge 3 est :

$$I_3 = \left(\frac{S_3}{\mathbf{V}_{LN}}\right)^* = \left(\frac{7.564 + j4.618}{0.120089}\right)^* = 62.991 - j38.455 \text{ A}$$

Le courant total est donc :

$$\mathbf{I}_t = 123.488 - j62.65 = 138.47\angle(-26.90^\circ)$$

2. Facteur de puissance

$$f_p = \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(26.90^\circ) = 0.892 \text{ (arrière)}$$

Exemple 9

Deux charges en parallèle sont branchées à une source par une ligne de $0.1 + j0.8\Omega/\phi$. La tension ligne-neutre aux charges est 4000V. Les deux charges sont : $L_1 = 630 + j840$ kVA et $L_2 = 15.36 - j4.48\Omega/\phi$ en Y. Calculer la tension ligne-ligne à la source.

On calcule d'abord la puissance complexe des deux charges pour une seule phase.

$$S_1 = \frac{S_{1,3\phi}}{3} = 210 + j280 \text{ kVA}$$

$$S_2 = \frac{|\mathbf{V}_{LN}|^2}{Z_Y^*} = \frac{(4000)^2}{15.36 + j4.48} = 960 - j280 \text{ kVA}$$

La puissance complexe totale :

$$S_t = 1170 \text{ kW}$$

Le courant de ligne :

$$I_L = \left(\frac{S_t}{\mathbf{V}_{LN}}\right)^* = \frac{1170}{4} = 292.5\angle(0^\circ) \text{ A}$$

La tension ligne-neutre à la source est :

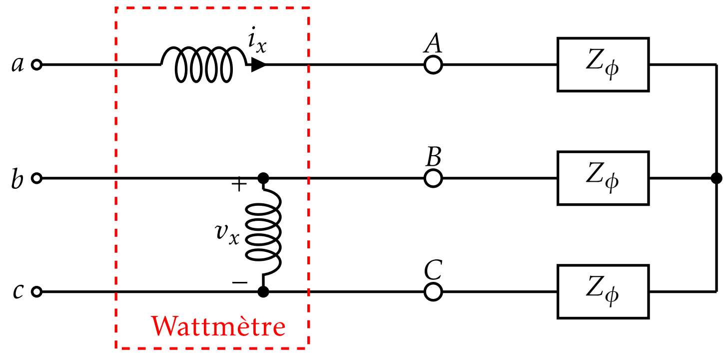
$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{S_{LN}} &= \mathbf{V}_{ch_{LN}} + Z_{ligne}\mathbf{I}_L = 4000 + (0.1 + j0.8)(292.5) = 4029.25 + j234 \\ &= 4036.04\angle(3.32^\circ) \text{ V}\end{aligned}$$

La tension de ligne est donc :

$$\mathbf{V}_{S_{LL}} = \sqrt{3}V_{S_{LN}}\angle(30^\circ) = 6990.62\angle(33.32^\circ) \text{ V}$$

Exemple 10

Soit le circuit suivant. Le wattmètre est branché comme donné dans la figure. La tension V_{an} est 720V, la séquence est positive, et l'impédance de la charge est $Z_\phi = 96 + j72\Omega$. Quelle est la lecture sur le wattmètre ?



Selon la figure, la lecture sur le wattmètre sera :

$$W = |\mathbf{V}_{BC}||\mathbf{I}_{aA}|\cos(\widehat{V_{BC}\quad I_{aA}})$$

La tension V_{BC},

$$\mathbf{V}_{BC} = V_{AB}\angle(-120°) = (\sqrt{3}V_{an}\angle(30°))\angle(-120°) = 1247.077\angle(-90°)\text{ V}$$

On trouve le courant I_{aA} :

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{an}}{Z_\phi} = \frac{720\angle(0)}{96 + j72} = 6\angle(-36.87°)\text{ A}$$

Il faut maintenant trouver l'angle entre V_{BC} et I_{aA}.

$$\begin{aligned}\widehat{V_{BC}\quad I_{aA}} &= \widehat{V_{BC}\quad V_{BN}} + \widehat{V_{BN}\quad I_{aA}} \\ &= (30°) + (-120° + \widehat{V_{an}\quad I_{aA}}) \\ &= (30°) + (-120° + \phi) \\ &= -90° + \phi\end{aligned}$$

Donc,

$$W = (1247.077)(6)\cos(90° - (-36.87°)) = 4489.488\text{ W}$$