Chapitre 4

Circuits triphasés déséquilibrés

Ce chapitre concerne les circuits triphasés déséquilibrés, où une ou plusieurs charges triphasées ne sont pas balancées (l'impédance n'est pas la même dans les trois phases).

4.1 Introduction

Il existe trois types de circuits triphasés déséquilibrés :

1. Charge déséquilibrée : Il peut exister un court-circuit dans la charge, ou une mauvaise répartition des charges monophasées sur le réseau 3ϕ.
2. Source déséquilibrée : Court-circuit à la source ou dans un transformateur.
3. Combinaison de source et charge déséquilibrées.

De façon pratique, on retrouve des charges déséquilibrés plus souvent que des sources déséquilibrées. On conçoit les sources pour qu'elles soient le plus équilibrées possible.

On peut utiliser l'une de deux méthode d'étude pour résoudre ces circuits :

1. Utilisation des lois relatives aux circuits électriques (mailles, noeuds, etc..)
2. Méthodes des composantes symétriques.

4.2 Lois des circuits

On commence l'analyse en utilisant un circuit simple. Dans le premier cas, on prend un circuit sans neutre, comme à la figure 4.1. Dans ce cas, $\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_n \neq 0$.

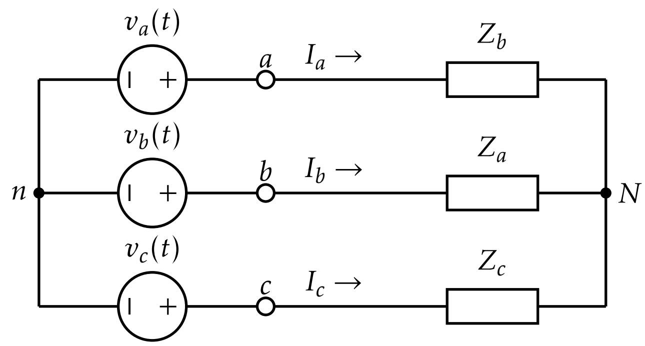


FIGURE 4.1 – Circuit triphasée en connection Y–Y sans neutre

En pratique, on connaît les tensions $\mathbf{V}_a$, $\mathbf{V}_b$, et $\mathbf{V}_c$ ainsi que les impédances Z_a, Z_b, et Z_c. On veut calculer les courants $\mathbf{I}_a$,$\mathbf{I}_b$ et $\mathbf{I}_c$. Il faut trois équations pour trouver ces trois inconnues.

On applique la LKV dans la maille supérieure :

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{V}_a + Z_a\mathbf{I}_a - Z_b\mathbf{I}_b + \mathbf{V}_b = 0\\
&Z_a\mathbf{I}_a - Z_b\mathbf{I}_b = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b
\end{aligned}$$

Puis on applique la LKV dans la maille inférieure :

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{V}_b + Z_b\mathbf{I}_b - Z_c\mathbf{I}_c + \mathbf{V}_c = 0\\
&Z_b\mathbf{I}_b - Z_c\mathbf{I}_c = \mathbf{V}_b - \mathbf{V}_c
\end{aligned}$$

On applique ensuite la LKC au noeud N : $\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0$, puis on résout le système d'équations pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_a &= \frac{(\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b)Z_c + (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_c)Z_b}{Z_aZ_b + Z_bZ_c + Z_cZ_a}\\
\mathbf{I}_b &= \frac{(\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_c)Z_a - (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b)(Z_a + Z_c)}{Z_aZ_b + Z_bZ_c + Z_cZ_a}\\
\mathbf{I}_c &= -(\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b)
\end{aligned}$$

Il est donc possible de trouver les courants à l'aide des méthodes classiques.

On reprend les calculs, mais cette fois dans un circuit triphasé avec le neutre (figure 4.2).

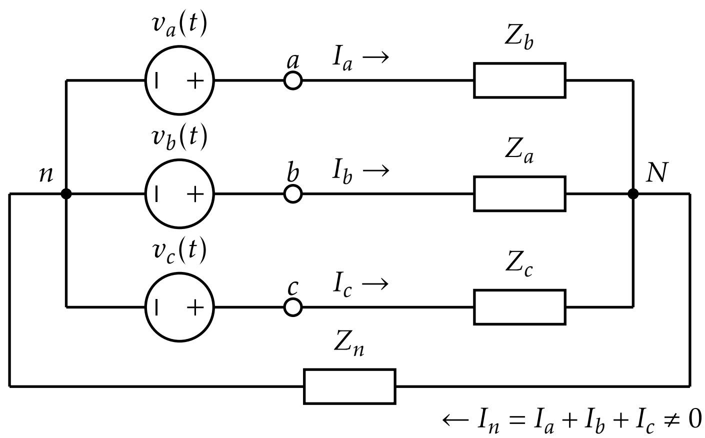


FIGURE 4.2 – Circuit triphasée en connection Y–Y sans neutre

En pratique, on connaît les tensions $\mathbf{V}_a$, $\mathbf{V}_b$, et $\mathbf{V}_c$ ainsi que les impédances Z_a, Z_b, Z_c et Z_n. On veut calculer $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$ et $\mathbf{I}_c$. On obtient l'équation suivante si on prend la phase a :

$$\mathbf{V}_a = Z_a\mathbf{I}_a + \mathbf{V}_{nN}$$

qu'on peut manipuler pour obtenir l'équation du courant :

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_{nN}}{Z_a}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_b &= \frac{\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_{nN}}{Z_b} \\
\mathbf{I}_c &= \frac{\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_{nN}}{Z_c} \\
\mathbf{I}_N &= \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c
\end{aligned}$$

On peut combiner ces équations pour obtenir :

$$\frac{\mathbf{V}_{nN}}{Z_n} = \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_{nN}}{Z_a} + \frac{\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_{nN}}{Z_b} + \frac{\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_{nN}}{Z_c}$$

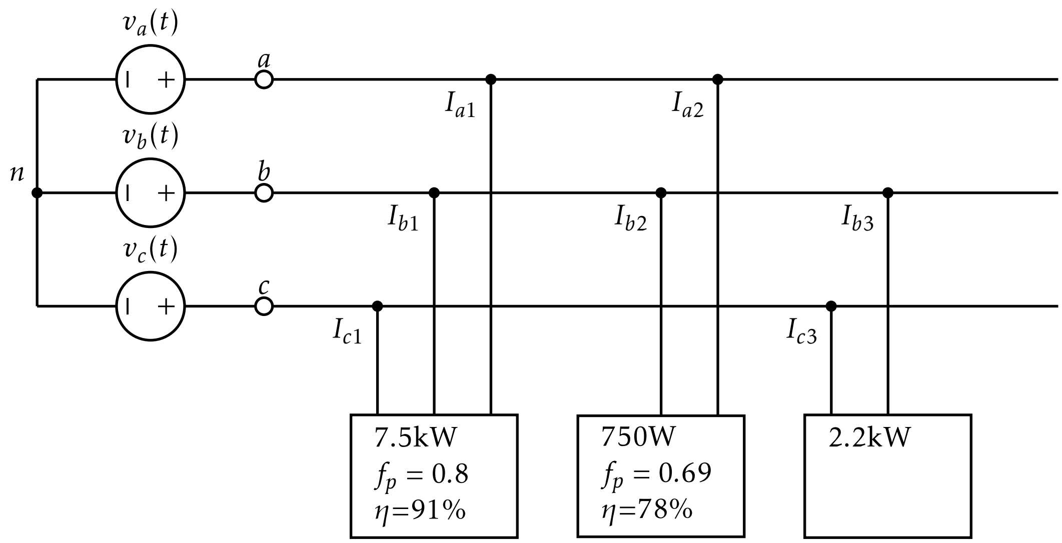
Ce qui donne :

$$\mathbf{V}_{nN} = \left(\frac{\mathbf{V}_a}{Z_a} + \frac{\mathbf{V}_b}{Z_b} + \frac{\mathbf{V}_c}{Z_c}\right)\left(\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_N}\right)^{-1}$$

De même, on peut résoudre ce genre de circuit par des méthodes classiques.

EXEMPLE 1

Soit le circuit triphasé suivant, avec trois charges différentes : 1 moteur triphasé, 1 moteur monophasé, et 1 radiateur monophasé.



La référence est $\mathbf{V}_a = 127\angle 0°$V. Quels sont les courants $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$ et $\mathbf{I}_c$?

Moteur 3ϕ :

$$\begin{aligned}
V_{an} &\rightarrow \text{référence de phase } = 127\angle 0° \\
P = VI\cos\phi &\Rightarrow I = \frac{P/\eta}{3V\cos\phi} = 27.06 \text{ A} \\
\phi &= \arccos(0.8) = 36.87°
\end{aligned}$$

On trouve donc que le courant est :

$$\mathbf{I}_{a1} = 27\angle(-37°) \text{ A}, \qquad \mathbf{I}_{b1} = 27\angle(-157°) \text{ A}, \qquad \mathbf{I}_{c1} = 27\angle(+83°) \text{ A}$$

Moteur 1ϕ :

$$\begin{aligned}
I_{ab} &= \frac{P/\eta}{V_l\cos\phi} = 6.34 \text{ A} \\
\phi &= \arccos(0.69) = 46.4° \\
\mathbf{I}_{ab} &= 6.34\angle(-46.4°)
\end{aligned}$$

On trouve donc que le courant est :

$$\mathbf{I}_{a2} = 6.34\angle(-16.4^\circ), \qquad \mathbf{I}_{b2} = -\mathbf{I}_{a2} = 6.34\angle(163.6^\circ), \qquad \mathbf{I}_{c2} = 0$$

Radiateur 1ϕ :

$$P = V_l I \Rightarrow I = \frac{P}{V_{bc}} = \frac{2200}{\sqrt{3}\cdot 127} = 10 \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_{b3} = 10\angle(-90^\circ + 0^\circ) = -j10 = -\mathbf{I}_{c3}$$

Puisque la tension V_{bc} est déphasée de -90° par rapport à la tension de référence, il faut tenir compte de ce déphasage dans le calcul de la phase du courant.

Donc, si on somme les courants :

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{a1} + \mathbf{I}_{a2} = 27\angle(-37^\circ) + 6.34\angle(-16.4^\circ) = 33\angle(-33^\circ) \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_{b1} + \mathbf{I}_{b2} + \mathbf{I}_{b3} = 27\angle(-157^\circ) + 6.34\angle(164^\circ) - j10 = 36\angle(-149^\circ) \text{ A}$$
$$\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_{c1} + \mathbf{I}_{c3} = 27\angle(83^\circ) + j10 = 37\angle(85^\circ) \text{ A}$$

4.3 Composantes symétriques

On commence la présentation des composantes symétriques par un développement général de la rotation vectorielle.

4.3.1 Rotation vectorielle

Soit deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

$$\vec{V}_1 \xrightarrow{R_\theta} \vec{V}_2 \tag{4.1}$$

R_θ est la rotation vectorielle d'angle θ, comme à la figure 4.3.

$\vec{V}_2$ est l'image de $\vec{V}_1$ par R_θ.

$$\vec{V}_2 = R_\theta(\vec{V}_1) \tag{4.2}$$

Propriétés : $\|\vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\|$; $(\widehat{\vec{V}_1 \quad \vec{V}_2}) = \theta$.

$\vec{V}_1$ a des coordonnées (x_1, y_1), et $\vec{V}_2$ a des coordonnées (x_2, y_2).

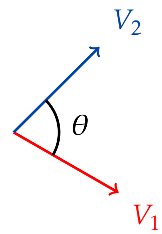


FIGURE 4.3 – Rotation vectorielle

Représentation Complexe

- V_1 c'est l'affiche complexe de $\vec{V_1} = x_1 + jy_1$.
- V_2 c'est l'affiche complexe de $\vec{V_2} = x_2 + jy_2$.

Une rotation de R_θ dans le plan complexe, c'est l'opérateur $e^{j\theta}$.

$$R_\theta \longrightarrow e^{j\theta} \tag{4.3}$$

$$V_2 = e^{j\theta} V_1 \tag{4.4}$$

L'opérateur j est une rotation d'angle de 90° : $j = e^{j90^\circ}$, comme à la figure 4.6.

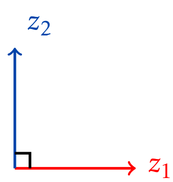


FIGURE 4.4 – Opérateur complexe j

On va définir un nouvel opérateur : l'opérateur a, où a = rotation d'angle de 120°.

$$a = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4.5}$$

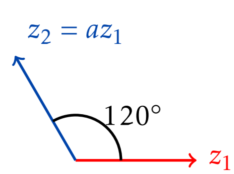


FIGURE 4.5 – Opérateur complexe a

Propriétés :

$$a^2 = (e^{j120})^2 = e^{j240} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = a^*$$

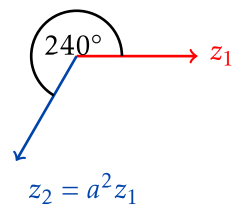


FIGURE 4.6 – Opérateur complexe a^2

THÉORÈME

Tout système triphasé déséquilibré peut être décomposé en une somme d'un système **direct**, d'un système **inverse** et d'un système **homopolaire**.

a. Système direct

Le système direct est un système triphasé équilibré de séquence directe (abc), comme à la figure 4.7.

$$\text{système direct} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_{da} \\ V_{db} \\ V_{dc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_d \\ a^2 V_d \\ a V_d \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

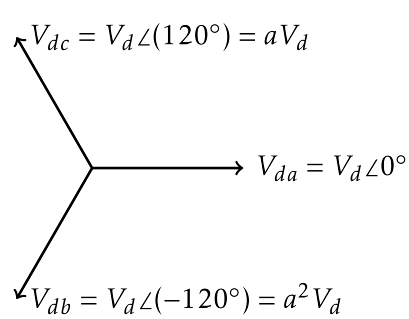


FIGURE 4.7 – Séquence directe

b. Système inverse

Le système inverse est un système triphasé équilibré de séquence inverse (acb), comme à la figure 4.8.

$$\text{système inverse } \Rightarrow \begin{bmatrix} V_{ia} \\ V_{ib} \\ V_{ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ aV_i \\ a^2 V_i \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

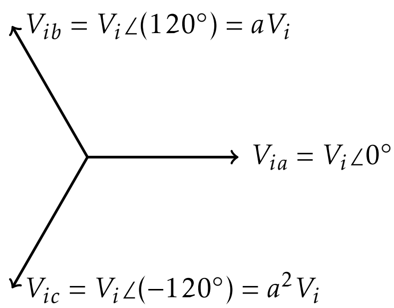


FIGURE 4.8 – Séquence inverse

c. Système homopolaire

Le système homopolaire est un système triphasé où les tensions sont égales, comme à la figure 4.9.

$$\text{système homopolaire } \Rightarrow \begin{bmatrix} V_{oa} \\ V_{ob} \\ V_{oc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} V_o \tag{4.8}$$

Dans ce cas, $V_{oa} = V_{ob} = V_{oc} = V_o$.

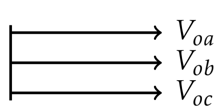


FIGURE 4.9 – Séquence homopolaire

On combine alors les trois systèmes (direct, inverse, homopolaire) pour obtenir un système complet :

$$\text{Soit } \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \text{ un système triphasé déséquilibré,}$$

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} V_d + \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} V_i + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} V_o \tag{4.9}$$

Représentation matricielle

On peut simplifier la représentation du système :

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} V_d \\ V_i \\ V_o \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Le calcul des tensions des systèmes se fait à l'aide de la matrice M inverse :

$$M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_d \\ V_i \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$$

4.4 Composantes symétriques de courant

Soit un système triphasé déséquilibré avec des courants : $\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$

On obtient les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_i \\ I_o \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} I_d \\ I_i \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Remarque : Le courant homopolaire est :

$$I_o = \frac{1}{3}(I_a + I_b + I_c) \tag{4.12}$$

- Dans une charge triphasée quelconque sans neutre, le courant homopolaire $I_o = 0$.
- Dans une charge triphasée équilibrée avec neutre, $I_o = 0$.

4.5 Composantes symétriques et impédances

Soit un système triphasé déséquilibré avec des impédances : $\begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix}$

On obtient les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_d \\ Z_i \\ Z_o \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} Z_d \\ Z_i \\ Z_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Remarque : Dans une charge triphasée équilibrée, $Z_a = Z_b = Z_c = Z$, et alors

$$\begin{aligned} Z_d &= \frac{1}{3}(1 + a + a^2)Z = 0 \\ Z_i &= \frac{1}{3}(1 + a^2 + a)Z = 0 \\ Z_o &= \frac{1}{3}(1 + 1 + 1)Z = Z \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.6 Composantes symétriques et tensions ligne-ligne

Pour la composante du système direct :

composante de phase :	$V_{da} = V_d \angle 0$
composante ligne-ligne :	$V_{d_{l,ab}} = V_d\sqrt{3}\angle(30°)$
	$V_{d_{l,bc}} = V_d\sqrt{3}\angle(-90°)$
	$V_{d_{l,ca}} = V_d\sqrt{3}\angle(150°)$

Pour la composante du système inverse :

composante de phase :	$V_{ia} = V_i \angle 0$
composante ligne-ligne :	$V_{i_{l,ab}} = V_i\sqrt{3}\angle(30°)$
	$V_{i_{l,bc}} = V_i\sqrt{3}\angle(+90°)$
	$V_{i_{l,ca}} = V_i\sqrt{3}\angle(-150°)$

Pour la composante homopolaire :

$$V_{ol} = \frac{1}{3}(V_{l,ab} + V_{l,bc} + V_{l,ca}) = 0$$

→ Quel que soit le système (avec neutre, sans neutre, équilibré, déséquilibré), la composante $V_{ol} = 0$. Mais on ne peut pas déterminer V_o avec V_{ol}.

4.7 Loi d'Ohm dans le domaine d-i-o

Soit une charge triphasée quelconque, montrée à la figure 4.10.

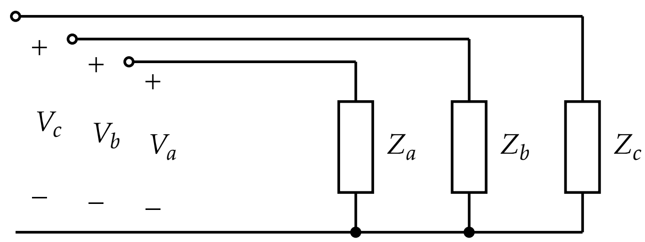


Figure 4.10 – Composantes symétriques et loi d'Ohm

On peut écrire les tensions dans une matrice :

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & 0 & 0 \\ 0 & Z_b & 0 \\ 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{V}_{abc} = \left[Z_{abc} \right] \vec{I}_{abc}$$

On peut relier les tensions et courants des trois séquences (directe, inverse et homopolaire) par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_i \\ V_o \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_o & Z_i & Z_d \\ Z_d & Z_o & Z_i \\ Z_i & Z_d & Z_o \end{bmatrix}}_{Z_{dio}} \begin{bmatrix} I_d \\ I_i \\ I_o \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

4.8 Calcul de puissance

Soit une charge triphasée quelconque, montrée à la figure 4.11.

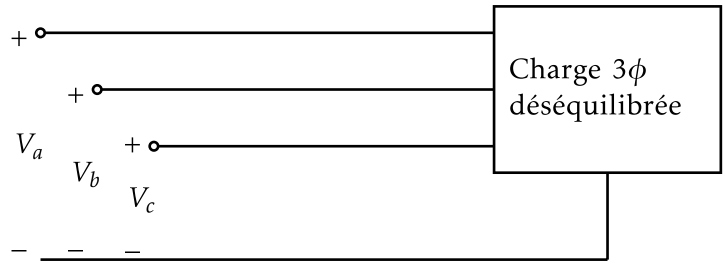


FIGURE 4.11 – Calculs de puissance et composantes symétriques

La puissance apparente totale est la somme des puissances sur chaque phase :

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{V}_a\mathbf{I}_a^* + \mathbf{V}_b\mathbf{I}_b^* + \mathbf{V}_c\mathbf{I}_c^* \qquad (4.16) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_a & \mathbf{V}_b & \mathbf{V}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a^* \\ \mathbf{I}_b^* \\ \mathbf{I}_c^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_b \\ \mathbf{V}_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{I}_b \\ \mathbf{I}_c \end{bmatrix}^* \qquad (4.17)$$

En fonction des composantes symétriques, la tension est :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_b \\ \mathbf{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_d \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_o \end{bmatrix}$$

Pour obtenir la transposée :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{V}_b \\ \mathbf{V}_c \end{bmatrix}^T = \left(\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_d \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_o \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_d \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_o \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M \end{bmatrix}^T$$

Le courant, en fonction des composantes symétriques, est :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{I}_b \\ \mathbf{I}_c \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} M \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d \\ \mathbf{I}_i \\ \mathbf{I}_o \end{bmatrix}^*$$

On combine pour obtenir la puissance S :

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_d \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_o \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d \\ \mathbf{I}_i \\ \mathbf{I}_o \end{bmatrix}^*$$

Si on multiplie les deux matrices $M^T \cdot M^*$:

$$\left[M\right]^T \left[M\right]^* = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a^3 + a^3 = 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Donc si on applique cette matrice :

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_d \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_o \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d \\ \mathbf{I}_i \\ \mathbf{I}_o \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_d \\ \mathbf{V}_i \\ \mathbf{V}_o \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3\mathbf{I}_d^* \\ 3\mathbf{I}_i^* \\ 3\mathbf{I}_o^* \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$= 3\mathbf{V}_d\mathbf{I}_d^* + 3\mathbf{V}_i\mathbf{I}_i^* + 3\mathbf{V}_o\mathbf{I}_o^* \tag{4.19}$$

De la même façon que les circuits équilibrés,

$$P = \mathfrak{Re}\{S\} \qquad Q = \mathfrak{Im}\{S\}$$

et

$$f_p = \frac{P}{|S|}$$

4.8.1 Mesure de la puissance dans un système déséquilibré

1. La méthode des 2 wattmètres est valide si le neutre n'est pas branché.
2. Si le neutre est branché, on utilise la méthode des 3 wattmètres.

Exemple 2

On mesure des tensions et impédances dans un système triphasé de :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{V}_{ab} = 200\angle 0^\circ & Z_{an} = 20 - j10\ \Omega \\ \mathbf{V}_{bc} = 173.2\angle(210^\circ) & Z_{bn} = 30 + j10\ \Omega \\ \mathbf{V}_{ca} = 100\angle(120^\circ) & Z_{cn} = 10 + j15\ \Omega \end{array}$$

Quelles sont les composantes de séquence directe, inverse et homopolaire des tensions de ligne, des impédances, des courants et des tensions de phase ? Quels sont les courants $\mathbf{I}_{an}, \mathbf{I}_{bn}$ et $\mathbf{I}_{cn}$ pris par cette charge ? Quelles sont les tensions $\mathbf{V}_{an}, \mathbf{V}_{bn}$ et $\mathbf{V}_{cn}$ aux bornes de cette charge ? Quelle est la séquence de phase ?

On peut obtenir les composantes de tensions en calculant :

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{ab}\\ \mathbf{V}_{bc}\\ \mathbf{V}_{ca}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{dl}\\ \mathbf{V}_{il}\\ \mathbf{V}_{ol}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{V}_{dl}\\ \mathbf{V}_{il}\\ \mathbf{V}_{ol}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{ab}\\ \mathbf{V}_{bc}\\ \mathbf{V}_{ca}\end{bmatrix}$$

Donc,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{dl}\\ \mathbf{V}_{il}\\ \mathbf{V}_{ol}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}200\angle 0^\circ\\ 173.2\angle(210^\circ)\\ 100\angle(120)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}152.7\angle(-10.9^\circ)\\ 57.7\angle(30^\circ)\\ 0\end{bmatrix}$$

Tensions de phase ?

$$\mathbf{V}_{dl} = 152.7\angle(-10.9^\circ) \Rightarrow \mathbf{V}_d = \frac{152.7\angle(-10.9^\circ)}{\sqrt{3}\angle(30^\circ)} = 88.16\angle(-40.9^\circ)$$

$$\mathbf{V}_{il} = 57.7\angle(30^\circ) \Rightarrow \mathbf{V}_i = \frac{57.7\angle(30^\circ)}{\sqrt{3}\angle(-30^\circ)} = 33.3\angle(60^\circ)$$

$$\mathbf{V}_{ol} = 0 \Rightarrow \mathbf{V}_o = ?$$

Courant :

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_d\\ \mathbf{V}_i\\ \mathbf{V}_o\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Z_{dio}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_d\\ \mathbf{I}_i\\ \mathbf{I}_o\end{bmatrix} \text{ où } \begin{bmatrix}Z_{dio}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Z_o & Z_i & Z_d\\ Z_d & Z_o & Z_i\\ Z_i & Z_d & Z_o\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}Z_d\\ Z_i\\ Z_o\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_a\\ Z_b\\ Z_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.25\angle(-49.1^\circ)\\ 13.3\angle(-96.1^\circ)\\ 20.6\angle(14^\circ)\end{bmatrix}$$

Dans une charge sans le neutre, $\mathbf{I}_o = 0$. Donc on obtient les équations suivantes :

$$1.\mathbf{V}_d = Z_o\mathbf{I}_d + Z_i\mathbf{I}_i = 88.16\angle(-40.9^\circ)$$
$$2.\mathbf{V}_i = Z_d\mathbf{I}_d + Z_o\mathbf{I}_i = 33.33\angle(60^\circ)$$
$$3.\mathbf{V}_o = Z_i\mathbf{I}_d + Z_d\mathbf{I}_i$$

Selon l'équation 1 et 2, on trouve $\mathbf{I}_d$ et $\mathbf{I}_i$:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_d\\ \mathbf{I}_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Z\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_d\\ \mathbf{V}_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\angle(-52^\circ)\\ 1.93\angle(49^\circ)\end{bmatrix}$$

Et maintenant, puisqu'on a trouvé $\mathbf{I}_d$ et $\mathbf{I}_i$, on peut trouver $\mathbf{V}_o$:

$$\mathbf{V}_o = Z_i\mathbf{I}_d + Z_d\mathbf{I}_i = 37\angle(-145^\circ)$$

Donc,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_a\\ \mathbf{V}_b\\ \mathbf{V}_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_d\\ \mathbf{V}_i\\ \mathbf{V}_o\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}72\angle(-43^\circ)\\ 155\angle(-161^\circ)\\ 37\angle(85^\circ)\end{bmatrix}\text{ V}$$

et le courant :

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_a\\ \mathbf{I}_b\\ \mathbf{I}_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_d\\ \mathbf{I}_i\\ \mathbf{I}_o\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3.25\angle(-17^\circ)\\ 4.9\angle(-179^\circ)\\ 2\angle(29^\circ)\end{bmatrix}\ \text{A}$$

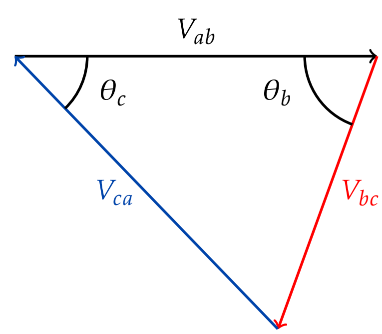
Exemple 3

Les tensions de ligne aux bornes d'une charge en étoile sans fil neutre sont respectivement 200V, 160V et 209V pour V_{ab}, V_{bc} et V_{ca}. Les impédances de chacune des phases de la charge sont :

$$\begin{aligned}Z_{an} &= 6 + j0\,\Omega\\ Z_{bn} &= 5.2 - j3\,\Omega\\ Z_{cn} &= 5 + j12\,\Omega\end{aligned}$$

Déterminer la tension aux bornes de chacune des trois impédances.

On doit commencer par trouver les angles des tensions à la source. Puisque les trois sources sont branchées en étoile, sans neutre, les tensions doivent former un système fermé :



On prend V_{ab} comme référence de phase, donc avec un angle de 0°. Avec l'utilisation de relations trigonométriques, on peut trouver θ_b et θ_c.

$$\cos\theta_b = \frac{|V_{ab}|^2 + |V_{bc}|^2 - |V_{ca}|^2}{2|V_{ab}||V_{bc}|} \Rightarrow \theta_b = 69.97^\circ$$
$$\cos\theta_c = \frac{|V_{ab}|^2 + |V_{ca}|^2 - |V_{bc}|^2}{2|V_{ab}||V_{ca}|} \Rightarrow \theta_c = 45.99^\circ$$

Donc les tensions sont :

$$\begin{aligned}
V_{ab} &= 200\angle 0° \text{ V} \\
V_{bc} &= 160\angle(-180° + 69.97°) = 160\angle(-110°) \text{ V} \\
V_{ca} &= 209\angle(+180° - 45.99°) = 209\angle(134°) \text{ V}
\end{aligned}$$

La première chose à trouver est la tension de ligne des trois séquences :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{dl} \\ \mathbf{V}_{il} \\ \mathbf{V}_{ol} \end{bmatrix} = \left[M^{-1}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ab} \\ \mathbf{V}_{bc} \\ \mathbf{V}_{ca} \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200\angle 0° \\ 160\angle(-110°) \\ 209\angle(134°) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 186.79 + j26.12 \\ 13.18 - j26.11 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 188.3\angle(8°) \\ 29.3\angle(-63.2°) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Les tensions de phase sont trouvées avec les relations habituelles :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{dl} &= 188.6\angle(30°) \Rightarrow \mathbf{V}_d = \frac{188.6\angle(8)}{\sqrt{3}\angle(30°)} = 108.9\angle(-22°) \\
\mathbf{V}_{il} &= 29.3\angle(-63.2°) \Rightarrow \mathbf{V}_i = \frac{29.3\angle(-63.2°)}{\sqrt{3}\angle(-30°)} = 16.9\angle(-33.2°) \\
\mathbf{V}_{ol} &= 0 \Rightarrow \mathbf{V}_o = ?
\end{aligned}$$

On trouve ensuite les impédances du système d-i-o :

$$\begin{bmatrix} Z_d \\ Z_i \\ Z_o \end{bmatrix} = \left[M^{-1}\right] \begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.85\angle(-17.3°) \\ 4.32\angle(-158.9°) \\ 6.18\angle(29.1°) \end{bmatrix}$$

On peut utiliser les équations de l'exemple 2 pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_d &= Z_o\mathbf{I}_d + Z_i\mathbf{I}_i = 108.9\angle(-22°) \\
\mathbf{V}_i &= Z_d\mathbf{I}_d + Z_o\mathbf{I}_i = 16.9\angle(-33.2°) \\
\mathbf{V}_o &= Z_i\mathbf{I}_d + Z_d\mathbf{I}_i
\end{aligned}$$

Selon l'équation 1 et 2, on trouve I_d et I_i :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_d \\ \mathbf{I}_i \end{bmatrix} = \left[Z\right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_d \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14\angle(-34.3°) \\ 8.4\angle(93°) \end{bmatrix}$$

Et maintenant, puisqu'on a trouvé I_d et I_i, on peut trouver V_o :

$$\mathbf{V}_o = Z_i\mathbf{I}_d + Z_d\mathbf{I}_i = 72.1\angle(-132.4°) \text{ V}$$

Donc,

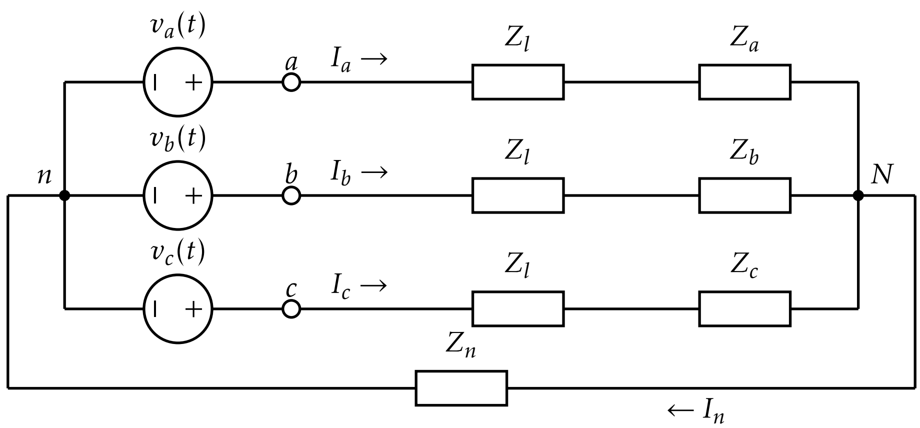
$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_a\\ \mathbf{V}_b\\ \mathbf{V}_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_d\\ \mathbf{V}_i\\ \mathbf{V}_o\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}66.5\angle(2.4°)\\ 133.5\angle(178.7°)\\ 172.5\angle(117.2°)\end{bmatrix}\text{ V}$$

Exemple 4

Une source triphasée équilibrée de 120/208V, 4 fils, alimente une charge triphasée en étoile. Des mesures ont permis de recueillir les informations suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{V}_{an} = 120\angle 0° & \mathbf{I}_a = 23\angle(-10°) & Z_l = 0.10 + j0.24\Omega \\
\mathbf{V}_{bn} = 120\angle(-120°) & \mathbf{I}_b = 34\angle(-120°) & Z_n = 0.15 + j0.36\Omega \\
\mathbf{V}_{cn} = 120\angle(+120°) & \mathbf{I}_c = 18\angle(+100°) &
\end{array}$$

On demande d'effectuer une analyse exhaustive des tensions, des courants et des puissances et de faire quelques commentaires.



On commence tout d'abord en calculant la puissance à la source. En premier, on calcule la puissance de façon normale, puis ensuite avec les composantes symétriques.
1. Tensions de phase :

$$\begin{aligned}
S_s &= \mathbf{V}_a\mathbf{I}_a^* + \mathbf{V}_b\mathbf{I}_b^* + \mathbf{V}_c\mathbf{I}_c^* \\
&= (120)(23\angle(+10°)) + (120\angle(-120°))(34\angle(+120°)) + (120\angle(+120°))(18\angle(-100°)) \\
&= 8828 + j1218 \text{ VA}
\end{aligned}$$

2. Composantes symétriques :

Il faut premièrement trouver les tensions et courants dans le système d-i-o.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_d\\ \mathbf{V}_i\\ \mathbf{V}_o\end{bmatrix} = \left[M^{-1}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{V}_a\\ \mathbf{V}_b\\ \mathbf{V}_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}120\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_d\\ \mathbf{I}_i\\ \mathbf{I}_o\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_a\\ \mathbf{I}_b\\ \mathbf{I}_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}24.5 - j3.38\\ -2.71 + j4.63\\ 0.84 - j5.24\end{bmatrix}$$

La puissance complexe est donc :

$$S = \begin{bmatrix}\mathbf{V}_d\\ \mathbf{V}_i\\ \mathbf{V}_o\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}3\mathbf{I}_d^*\\ 3\mathbf{I}_i^*\\ 3\mathbf{I}_o^*\end{bmatrix}$$

$$= 8828 + j1218 \text{ VA}$$

On voit qu'on obtient la même réponse.
⇒ Si la source est équilibrée (même si la charge est en déséquilibre), la puissance apparente n'est seulement que dans la séquence directe (si la séquence de phase est positive).

Dans les lignes :
1. Façon usuelle :

$$\begin{aligned} S_l &= Z_l|\mathbf{I}_a|^2 + Z_l|\mathbf{I}_b|^2 + Z_l|\mathbf{I}_c|^2 \\ &= 200.9 + j482.2 \text{ VA}\end{aligned}$$

Puissance dans le neutre :

$$S_n = Z_n|\mathbf{I}_n|^2 = Z_n|\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c|^2 = 38.0 + j91.2 \text{ VA}$$

2. Composantes symétriques : Chute de tension dans la ligne

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{la} &= Z_l\mathbf{I}_a = 5.98\angle(57.4°) \text{ V}\\ \mathbf{V}_{lb} &= Z_l\mathbf{I}_b = 8.84\angle(-52.6°) \text{ V}\\ \mathbf{V}_{lc} &= Z_l\mathbf{I}_c = 4.68\angle(167.4°) \text{ V}\\ \mathbf{V}_{ln} &= Z_n\mathbf{I}_n = 6.21\angle(-13.5°) \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{ld}\\ \mathbf{V}_{li}\\ \mathbf{V}_{lo}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}M^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{la}\\ \mathbf{V}_{lb}\\ \mathbf{V}_{lc}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3.26 + j5.55\\ -1.38 - j0.19\\ 1.34 - j0.32\end{bmatrix}$$

On connaît déjà les courants, donc :

$$S_{ligne} = \begin{bmatrix}\mathbf{V}_{ld}\\ \mathbf{V}_{li}\\ \mathbf{V}_{lo}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}3\mathbf{I}_d^*\\ 3\mathbf{I}_i^*\\ 3\mathbf{I}_o^*\end{bmatrix}$$

$$= 200.9 + j482.2 \text{ VA}$$

Et, dans le neutre :

$$S_n = \mathbf{V}_{ln}\mathbf{I}_n^* = 38 + j91.2 \text{ VA}$$

Dans la charge :

1. Façon usuelle : On calcule d'abord la tension aux bornes de la charge :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{CHa} &= \mathbf{V}_{sa} - \mathbf{V}_{la} - \mathbf{V}_{nN} \\
&= 110.8\angle(-1.86°) \\
\mathbf{V}_{CHb} &= 119.2\angle(-126.8°) \\
\mathbf{V}_{CHc} &= 121.1\angle(120.5°)
\end{aligned}$$

La puissance apparente à la charge est :

$$\begin{aligned}
S_s &= \mathbf{V}_{CHa}\mathbf{I}_a^* + \mathbf{V}_{CHb}\mathbf{I}_b^* + \mathbf{V}_{CHc}\mathbf{I}_c^* \\
&= (110.8\angle(-1.86°))(23\angle(10°)) + (119.2\angle(-126.8°))(34\angle(120°)) + (121.1\angle(120.5°))(18\angle(-100°)) \\
&= 8589 + j645 \text{ VA}
\end{aligned}$$

2. Composantes symétriques :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{CHd} \\ \mathbf{V}_{CHi} \\ \mathbf{V}_{CHo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{CHa} \\ \mathbf{V}_{CHb} \\ \mathbf{V}_{CHc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 116.9\angle(-2.7) \\ 1.39\angle(7.8) \\ 7.59\angle(166.5) \end{bmatrix}$$

On calcule les puissances :

$$\begin{aligned}
S_{CHd} &= \mathbf{V}_{CHd}\mathbf{I}_d^* \\
&= 8644 + j777 \text{ VA} \\
S_{CHi} &= \mathbf{V}_{CHi}\mathbf{I}_i^* \\
&= -8.6 - j20.7 \text{ VA} \\
S_{CHi} &= \mathbf{V}_{CHd}\mathbf{I}_d^* \\
&= -46.4 - j111.4 \text{ VA}
\end{aligned}$$

Si on fait la somme des trois puissances à la charge, on retrouve le même résultat que celui obtenu de la façon habituelle, soit $8589 + j645$ VA.

Notez bien : Dans les séquences inverses et homopolaires, la charge *fournit* de la puissance. Si on fait un bilan des puissances, on trouve que la source fournit 8828 W en séquence directe. La charge en consomme 8644 W, et les lignes 184 W. Des 8644 W consommés par la charge, 8589 sont de la puissance utile et 55 W sont retournés dans les lignes pour compléter les pertes globales.

Un bilan des puissances permet d'illustrer ce concept un peu mieux :

Façon usuelle		
Source	$8828 + j1218$	fournit
Ligne	$200.9 + j482.2$	consomme
Neutre	$38 + j91.2$	consomme
Charge	$8589 + j645$	consomme

Composantes symétriques			
Source	d	$8828 + j1218$	fournit
	i	0	—
	o	0	—
Ligne	d	$183.8 + j441.2$	consomme
	i	$8.6 + j29.7$	consomme
	o	$8.4 + j20.3$	consomme
Neutre	d	0	—
	i	0	—
	o	$38 + j91.2$	consomme
Charge	d	$8644 + j777$	consomme
	i	$-8.6 - j20.7$	fournit
	o	$-46.4 - j111.4$	fournit

Si on additionne les puissances de la ligne, neutre, et charge, on trouve bien que le total est le même que la source.